
NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06907909 7

# DIE METHODIK

DER

# PRAKTISCHEN ARITHMETIK

IN

## HISTORISCHER ENTWICKELUNG

VOM

## AUSGANGE DES MITTELALTERS BIS AUF DIE GEGENWART

NACH DEN ORIGINALQUELLEN BEARBEITET

VON

**FRIEDRICH UNGER,**

OBERLEHRER AN DER REALSCHULE ZU LEIPZIG-REUDNITZ.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1888.

**Wer in einer Kunst Meister werden will, studiere deren Geschichte. Ohne historisches Fundament bleibt alles Können unvollkommen und das Urteil über die Erscheinungen der Gegenwart unsicher und unreif.**

# Vorwort.

Historische Nachrichten müssen verbürgt sein. Unter steter Beobachtung dieses obersten Grundsatzes eines gewissenhaften Geschichtsschreibers ist vorliegendes Werk entstanden und trägt daher im Gegensatze zu mancher Schrift der Neuzeit keinen kompilatorischen Charakter. Der Verfasser stützt sich für den behandelten Zeitraum durchweg auf die Originalquellen. Er hat keine Mühe gescheut und kein Mittel unversucht gelassen, dieselben aufzusuchen und sich zu verschaffen. Die Mühe war reichlich belohnt; denn durch das sorgfältige, umfassende Quellenstudium wurde er in den Stand gesetzt, die bezüglich des bearbeiteten Themas bereits bekannten Resultate wesentlich zu ergänzen und viele, selbst von Autoritäten begangene und von Kompilatoren nachgeschriebene Irrtümer zu berichtigen. So sind beispielsweise diejenigen Partien, welche dem rein kaufmännischen Rechnen angehören, bisher von allen Historikern vernachlässigt worden, und die ersten gedruckten Rechenbücher haben die meisten garnicht gesehen; über das älteste (Wagners Rechenbuch 1482) steht noch nirgends eine Nachricht, dasselbe aufgefunden zu haben ist ein Verdienst des Verfassers.

Die Berichtigungen sind meist stillschweigend geschehen und es ist nicht immer und immer gesagt: dort und dort steht irrtümlich so und so. Nur bei Vorführung der ältesten gedruckten Rechenbücher hat sich der Verfasser die Mühe genommen, eine Anzahl von den bekanntesten Historikern zu nennen, welche Widmanns „Behēde vnd hubsche Rechenung“ 1489 als das älteste deutsche Rechenbuch bezeichnen. Bei hinlänglicher Benutzung der bibliographischen Hilfsmittel hätten jedoch alle wenigstens Kenntnis haben können von dem „Rechenpüchlein“, welches Petzensteiner 1483 zu Bamberg druckte. Der Leser wird darin einen Beweis erblicken für die grofse Vertrauensseligkeit, mit welcher einer die Resultate des andern hingenommen hat, was freilich leichter und bequemer ist als das Aufsuchen und Herbeischaffen der ersten Quellen. Wie mühevoll, zeitraubend und mitunter auch kostspielig dieses Geschäft ist, wird derjenige wissen, der jemals nach Inkunabeln gesucht hat. — Bei grofsen Selten-

heiten ist der Fundort angegeben, womit manchem ein Dienst geleistet sein wird.

Liefs es demnach der Verfasser einerseits an Quellenstudium nicht fehlen, so suchte er auch der andern Pflicht eines Historikers zu genügen, indem er die Vorarbeiten andrer gehörig würdigte, und er glaubt, in dieser Hinsicht jedem das Seine gelassen und keinem den Fleifs der Nächte geraubt zu haben. Ungeprüft wurde, soweit thunlich, keine Angabe hingenommen.

In den gelegentlich beigebrachten historischen Nachrichten für weiter zurückliegende Zeiten hat sich der Verfasser meist auf Cantor (Vorlesungen über Gesch. der Math. 1880 I) gestützt. Dieser um die Geschichte der mathematischen Wissenschaften hochverdiente Gelehrte dürfte allen als sichrer Gewährsmann hinreichend bekannt sein.

Unzweckmäfsig wäre es, das Thema für eine Schulgattung allein, beispielsweise für die Volksschule zu stellen; das würde eine einseitige Behandlung ergeben. Umfang und Auswahl des Stoffes richten sich stets nach dem vorhandenen Bedürfnisse, und dieses war zu verschiedenen Zeiten und an verschiedenen Orten ein sehr verschiedenes. Wie von einander abweichend sind nicht gegenwärtig in den bestehenden Schulgattungen und selbst in Schulen einerlei Gattung Ziel und Methode des Rechnens! Das Thema mufs in seiner Allgemeinheit bearbeitet werden. Im Laufe der Zeit haben sogar die Schulgattungen gewechselt, welche als die jeweilig vorzüglichsten Pflanzstätten der praktischen Arithmetik zu nennen sind. Die lateinischen Schulen haben sich dieses Ruhms niemals erfreut, ihn auch nie erstrebt und werden's wohl auch nimmer thun. Am Ausgange des Mittelalters und Anfang der Neuzeit konnte die Rechenkunst nur in den Rechenschulen erlernt werden. Gar langsam und mit sehr bescheidnen Anforderungen bürgerte sich dieses Unterrichtsfach in den Volksschulen ein, ging dann als Hauptfach auf die Realschulen über, und jetzt laufen die Handelsschulen im Rechnen allen übrigen Schulen den Rang ab.

Es sind drei Perioden abgegrenzt worden: In der ersten bis ca. 1700 war der Mechanismus, das Operieren nach gegebenen Regeln verbunden mit der dogmatischen Lehrart, vorherrschend; in der zweiten (1700 bis 1800) begegnen wir dem Rechnen mit Betonung der Gründe, und in der letzten sucht man durch Aufstellung von Principien der Methodik des Rechenunterrichts eine sichere Grundlage zu geben. An äufserem Umfange übertrifft die erste Periode die beiden andern; die Notwendigkeit dazu liegt in dem Umstande, dafs für jenen Zeitraum neben der Methode auch der Stoff darzulegen war, um damit zu zeigen, aus welchen Anfängen die heutigen Resultate erwachsen sind. Für die folgenden Zeiten war es

thunlich, nur die neuen und hauptsächlichsten Erscheinungen heranzuziehen, und der Verfasser begnügte sich, die Marksteine der Entwickelung zu bezeichnen.

Weil die Geschichte eines einzelnen Unterrichtszweiges nur völlig verständlich wird in Verbindung mit der Geschichte der gesamten Pädagogik, so ist für jeden Abschnitt mit kurzen Worten derjenigen Faktoren gedacht worden, deren Vorhandensein und gehöriges Zusammenwirken einen wohlgeordneten Schulorganismus bedingen. Auch diese Partien sind mit urkundlichen Stellen belegt worden; und die hier gegebene Übersicht über den Schulbestand im Reformationszeitalter wird hoffentlich auch geeignet sein, auf verschwommene und irrtümliche Meinungen über die Schulverhältnisse jener Zeit klärend und berichtigend zu wirken.

Somit ist die ganze Darstellung geworden zu einer Summe von Wahrheiten, welche dokumentiert sind, wovon sich der aufmerksame Leser leicht selbst überzeugen wird.

Die schicklichste Einleitung zu dem Werke wäre ein kurzer Überblick über die Entwickelung der Rechenkunst von ihrem Ursprunge bis ins Reformationszeitalter. Dieselbe wird jedoch an dieser Stelle unterdrückt, weil der Verfasser selbst schon in einer Programmschrift (Realschule, Leipzig-Reudnitz 1883) die Haupterscheinungen aus der Geschichte der elementaren Arithmetik von den frühesten Zeiten bis zur Wende des 15. Jahrhunderts in übersichtlicher Darstellung vorgeführt hat. Da genannte Abhandlung ursprünglich nicht selbständig, sondern in Verbindung mit dieser Arbeit erscheinen und demgemäfs nur einen einleitenden Charakter tragen sollte, so war dazu das Zurückgehen auf die ersten Quellen nicht absolute Bedingung, und es sind dort deshalb auch die Forschungen andrer benutzt worden.

Am Schlusse dieses Vorworts möchte es der Berichterstatter nicht unterlassen, seinen wärmsten Dank auszusprechen gegen alle Bibliotheksvorstände, welche ihm nicht allein den Zugang zu den Bibliotheken bereitwilligst eröffnet und die Benutzung selbst der kostbarsten litterarischen Schätze ermöglicht, sondern ihn auch in liebenswürdigster Weise durch eingehende Beantwortung von oft sehr belangreichen Anfragen wesentliche Dienste geleistet haben.

So ist der Verfasser denn bemüht gewesen, mit diesem Werke der Wahrheit einen Schritt näher zu kommen, was ja der *eine* Zweck jeder wissenschaftlichen Arbeit sein soll. Den *praktischen* Zweck, der zugleich mit verfolgt wurde, wird dem Leser das Motto sagen.

Möge das Werk freundliche Aufnahme finden und Segen stiften!

**Der Verfasser.**

# Quellen.

## a) Zur mathematischen Bücherkenntnis.

Christ. Wolf, Kurtzer Unterricht von den vornehmsten math. Schriften, 1750.
Scheibel, Einleitung zur math. Bücherkenntnifs, 1769—1787.
Panzer, Annalen der älteren deutschen Litteratur, 1788—1805.
Panzer, Zusätze zu den Annalen d. ält. d. Litt., 1802.
Murhard, Litteratur der math. Wissenschaften, 1797.
Hain, Repertorium bibliographicum, 1826—1838.
Grässe, Lehrbuch einer allgem. Literärgeschichte II, 2, 2 S. 850—855, 1837—1842.
Enslin, Bibliothek der Handlungswissenschaft, 1846.

## b) Für biographische Nachrichten.

Doppelmayr, Historische Nachricht von den Nürnbergischen Mathematicis und Künstlern, 1730.
Jöcher, Allgemeines Gelehrten-Lexikon, 1750—1751.
Dunkel, Historisch kritische Nachrichten von verstorbenen Gelehrten und ihren Schriften, 1753—1757.
Buck, Lebensbeschreib. der verstorb. preufs. Mathematiker, 1764 (als Buck I citiert).
Buck, Nachrichten von dem Leben und den Erfindungen der berühmtesten Mathematiker, 1788 (als Buck II citiert).
Poggendorff, Biographisch literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften, 1863.
Allgemeine deutsche Biographie.

## c) Vermischten Inhalts.

Schmidt, Encyklopädie des gesammten Erziehungs- und Unterrichtswesens.
Ersch u. Gruber, Allgemeine Encyklopädie d. Wissenschaften u. Künste.
K. v. Raumer, Geschichte d. Pädagogik, 4. Aufl. 1872.
Vormbaum, Evangelische Schulordnungen, 1860—1864.
Joh. Müller, Vor- und frühreformatorische Schulordnungen, 1885—1886.
Joh. Müller, „Quellenschriften“ in Kehr, Geschichte der Methodik, 1882 IV.
Serapeum, Zeitschrift für Bibliothekswissenschaft, Handschriftenkunde und ältere Litteratur.
Fischer, Beschreibung einiger typographischen Seltenheiten, 1800—1803.
Süfsmilch, Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, 4. Aufl. 1775.
Schiebe, Universallexikon der Handelswissenschaften, 1837.
Noback-Steger, Allgemeine Encyklopädie für Kaufleute, 1864.
Schiebe-Odermann, Die Contorwissenschaft, 7. Aufl. 1871.

Rothschilds Taschenbuch für Kaufleute, 26. Aufl. 1880.
Mone, Zeitschrift f. d. Geschichte des Oberrheins, 1851, 2. Bd.
Heppe, Geschichte d. deutschen Volksschulwesens, 1858—1860.
Heppe, Das Schulwesen des Mittelalters, 1860.
Schultheiſs, Geschichte der Schulen in Nürnberg, 1853—1857.
Wattenbach, Das Schriftwesen im Mittelalter, 2. Aufl. 1875.
Faulmann, Illustrirte Geschichte d. Buchdruckerkunst, 1882.

d) Für Geschichte der Mathematik im allgemeinen.

Kästner, Geschichte der Mathematik, 1796—1800.
Klügel, Mathematisches Wörterbuch, 1803—1831.
Ofterdinger, Beiträge z. Gesch. der Math. in Ulm, 1867.
Suter, Geschichte der math. Wissenschaften, 1873—1875.
Hankel, Zur Gesch. d. Math. im Alterthum u. Mittelalter, 1874.
Günther, Vermischte Untersuchungen z. Gesch. d. math. Wissenschaften, 1876.
Günther, Beiträge zur Gesch. d. neueren Mathematik, 1881.
Gerhardt, Geschichte d. Math. in Deutschland, 1877.
Cantor, Vorlesungen über Gesch. der Mathematik, 1880, 1. Bd.
Crelle, Journal f. d. reine u. angewandte Math.
Zeitschrift für Mathematik u. Physik, Schlömilch-Kahl-Cantor.
Zeitschrift f. math. u. naturwiss. Unterricht, Hoffmann.

e) Für Geschichte der Arithmetik insbesondere.

Joh. Gottf. Büchner, Kurtzer Entwurff von der Historie der Rechenkunst, Waldenburg 1719.
Friedlein, Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen, Römer u. des christl. Abendlandes vom 7. bis 13. Jahrhundert, 1869.
Wildermuth, Rechnen in Schmidts Encyklopädie, Bd. 6.
Kuckuck, Die Rechenkunst im 16. Jahrhundert, 1874 (Progr. Gymn. graues Kloster Berlin). — [Kuckuck heiſst jetzt Kallius.]
Treutlein, Geschichte unsrer Zahlzeichen, 1875 (Progr. Gymn. Karlsruhe).
Treutlein, Das Rechnen im 16. Jahrhundert, 1877.
Stoy, Zur Geschichte des Rechenunterrichts, 1876 I (Dissertation).
Weissenborn, Die Entwickelung des Zifferrechnens, 1877 (Progr. Eisenach).
Jänicke, Geschichte des Rechenunterrichts in Kehr, Geschichte d. Methodik Bd. 1, 1877.
Villicus, Das Zahlenwesen der Völker im Alterthume u. die Entwickelung d. Zifferrechnens, 1880 u. 1881 (Progr. Staatsrealschule Wien).
Günther, Gesch. des math. Unterrichts im deutschen Mittelalter bis 1525 in: Monumenta Germaniae Paedagogica, 1887, 3. Bd.

f) Arithmetische Schriften.

Scritti di Leonardo Pisano .. Vol. I: Il Liber abbaci di Leonardo Pisano 1202, publicato da Boncompagni Roma 1857.
Jordan Nemorarius, Algorithmus demonstratus, ediert 1534 von J. Schoner.
Peurbach, Elementa Arithmetices. Gedruckt 1536 zu Wittenberg.
Ulrich Wagner, Rechenbuch, gedruckt 1482 von Petzensteiner in Bamberg (Fragmente).

## Zweite Hälfte: das 17. Jahrhundert.



## Zweite Periode: von 1700—1800.

### Betonung der beweisführenden Lehrart.



## Dritte Periode: von 1800 bis heute.

### Verfechtung von Principien.

Die erste Periode: von ca. 1450—1700.

# Einseitige Gedächtniskultur oder Mechanismus.

## Erste Hälfte.

## Das 15. und 16. Jahrhundert.

### Erstes Kapitel.

### Übersicht über die Schulverhältnisse.

§ 1. **Aufschwung des Schulwesens.** Die Reformation, die vorhergegangene Wiederbelebung des klassischen Altertums, die Erfindung des Buchdrucks, die bevorzugte Pflege der Astronomie, die Entdeckung neuer Weltteile, der aufblühende Handel mit dem daraus fliefsenden Wohlstande der Bürger: das sind die Momente, welche mit dem Anfange der neuen Zeit auch den Aufschwung des Schulwesens veranlafst und mächtig gefördert haben.

Der Humanismus, welcher der Reformation wie das Morgenrot der aufgehenden Sonne voranleuchtete, ist eine Erscheinung, ebenso einzig in der Geschichte dastehend wie die Reformation selbst. Die Bewegung, welche ihren Anfang in Italien nahm und hier durch die nach der Zertrümmerung des oströmischen Kaiserreichs einwandernden griechischen Gelehrten wesentlich gefördert wurde, verbreitete sich, unterstützt durch Konzile und kaiserliche und päpstliche Sendboten, bald über die Länder diesseits der Alpen: Frankreich, Deutschland, die Niederlande. Die Werke der alten Griechen, welche bisher nur in verderbter Übersetzung und mangelhaften Kommentaren bekannt waren, wurden nun in der Originalsprache studiert. Die Hingabe der Träger der humanistischen Bestrebungen war so vollständig, dafs das Studium der Alten in der gänzlichen Aufgehung des Ichs gipfelte. Kein Wunder, dafs jene Zeit die Pflanzstätten des Humanismus, die lateinischen Schulen, in grofser Zahl erstehen sah. In den Ländern der preufsischen Monarchie wurden im 16. Jahrhundert über 70 Gymnasien gegründet, während im 17. Jahrhundert nur 28 und im 18. Jahrhundert nur 21 neue hinzukamen.

Von der gröfsten Bedeutung für die Ausbreitung des Humanismus wurde die Erfindung des Buchdrucks. Sein Einflufs auf die Entwickelung der Wissenschaften und Entfaltung des menschlichen Geistes ist der gewaltigste geworden. Durch ihn wurden die Schöpfungen des gelehrten Altertums dem Staube der Klöster entrissen, durch ihn den Erzeugnissen des Geistes Flügel und Ewigkeit verliehen. Scholastik und Hierarchie sanken, Licht und Freiheit traten an ihre Stelle. Zu keiner günstigeren Zeit konnten die türkischen Horden in das morgenländische Kaisertum einbrechen. Die vor ihnen flüchtenden griechischen Gelehrten brachten die griechische Sprache und Litteratur nach dem Westen, und der Buchdruck verband damit seinen mächtigen Einflufs. Bisher war die Vervielfältigung der Bücher mit ungeheurer Mühe verbunden und zur Beschaffung einer auch nur kleinen Bibliothek gehörten fürstliche Mittel. Der Buchdruck ermöglichte auch den minder Bemittelten den Besitz einer Bibliothek, ja er trug die Früchte des Geistes selbst in die Hütten der Armen. Mit dem Buchdruck ward die wichtigste Vorbedingung zur Ausbreitung der Wissenschaft, korrekte und billige Herstellung der Bücher, erst erfüllt. Mit der Entstehung von Druckschriften wurden die Bildungsstätten fürs gemeine Volk zum Bedürfnis und zur Möglichkeit, denn aus Handschriften konnten Bauernkinder nicht lesen lernen.

Anfänglich war die Philologie die bevorzugte Disciplin des Unterrichts, doch trat ihr bald die Mathematik ebenbürtig zur Seite. Es war dies einerseits eine Folge der philologischen Studien selbst, da man nicht nur diejenigen Werke studierte, aus denen Gewandtheit der Sprache und Kunst der Rede flossen, sondern sich auch in den Inhalt der mathematischen Werke des Altertums vertiefte; beispielsweise erschienen im 16. Jahrhundert die Schriften des Euklid, Ptolemäus, Archimed, Diophant in der Originalsprache. Andrerseits erforderte die eifrige Pflege der Astronomie das Studium ihrer mächtigen Helferin, der Mathematik. Beobachtung und Rechnung müssen einander korrigieren und bestätigen, nur in ihrer Übereinstimmung liegt das sichere Kriterium von der richtigen Erkenntnis der Erscheinungen. Kaiser und Könige hatten damals ihre Hofmathematiker und Hofastronomen. Freilich trugen die Fürsten weniger Verlangen nach den rein wissenschaftlichen Ergebnissen astronomischer Forschung, sondern begehrten vielmehr die Dienste der Astrologie, der mystischen Schwester der Astronomie, derjenigen geheimen Kunst, welche aus den verschiedenen Konstellationen der Gestirne die Zukunft ergründen wollte.

Dem wissenschaftlichen Antriebe gesellte sich auch ein praktisches Bedürfnis zur Pflege der mathematischen Wissenschaften bei. Dieses entsprang dem aufblühenden Handel, welcher die Entdeckung neuer Weltteile zur Voraussetzung und den zunehmenden Wohlstand der Bürger zur Folge

hatte. So flossen aus derselben Quelle, dem Handel, Bedürfnis und materielle Mittel zur Pflege der Wissenschaften. Solange man Ware gegen Ware tauschte, war eine Rechnung nicht erforderlich; erst mit der Einführung des Geldes als Zahlungsmittel machten Maſs- und Gewichtvergleichungen und Preisberechnungen die Operationen mit den Zahlen nötig. In der neuern Zeit sind an der Börse gewisse Kaufgeschäfte zu reinen arithmetischen Operationen geworden, indem dabei vom Geben und Nehmen der Ware vollständig abstrahiert wird.

In den Kloster- und Domschulen, welche lediglich die Ausbildung für den Kirchendienst im Auge hatten, ist die Pflege der praktischen Arithmetik nicht zu finden. In kaufmännischen Kreisen müssen wir die Träger dieser Kunst suchen, der Kaufmannslehrling erlernte sie von seinem Lehrherrn. Seit dem Ende des 13. Jahrhunderts hatte Norditalien die Vermittelung zwischen dem Orient und Europa übernommen, und der Welthandel ging von Italien durch Deutschland über Augsburg, Nürnberg, Frankfurt a. M und verzweigte sich von hier nach Leipzig und den nördlichen Hansastädten einerseits und nach Köln und den Niederlanden andrerseits. In Frankreich erhoben sich Lyon und Paris, in Österreich Wien, Linz und Ofen zu Haupthandelsplätzen. Die Italiener waren nicht nur die klügsten und unternehmendsten Kaufleute jener Zeit, sondern auch die gewandtesten Rechner und den Deutschen weit überlegen. Sie wurden in der Rechenkunst die Lehrmeister der deutschen Kaufleute; ihre Methode, welsche Praktik genannt, galt für die beste und hat sich bis auf den heutigen Tag in deutschen Rechenbüchern erhalten. Ed. Amthor beginnt seine 'Quintessenz des kaufm. Rechnens 1862' mit einem Kapitel der welschen Praktik.

Der Beginn des 16. Jahrhunderts, die Grenze zweier Weltgeschichtsperioden, bildet auch für das Schulwesen den Anfang einer neuen Epoche; jetzt erst gewann nach den schwachen Anläufen früherer Jahrhunderte der Gedanke, Volksschulen zu gründen, Gestalt und Leben. Vornehmlich waren es die Reformatoren, die ihre Fürsorge der Schule zuwandten; in der Verbreitung wissenschaftlicher Erkenntnis und in der Kultur des Geistes überhaupt erkannten sie die notwendigen Mittel für den Fortbestand ihres Werkes, durch welches die Christenheit vom blinden Autoritätsglauben zu geistiger Freiheit geführt werden sollte.

Zur Gründung einer Schule war es vor dem Reformationszeitalter an den meisten Orten gar nicht gekommen, und die wenigen vom Klerus unterhaltenen befanden sich in trauriger Verfassung. In der Einübung höchst dürftiger Kenntnisse der lateinischen Sprache und der kirchlichen Gesänge bestand der ganze Unterricht. Schüler waren die künftigen Kirchendiener. Unter den Lehrern gab es nicht wenige, die alles andre

nur nicht Träger der Kultur waren. Der auf Kündigung[1]) angestellte Schulmeister (*scholasticus*) wählte nach Belieben seine Schulgesellen (*scolares vagantes*), welche nicht selten durch ihr anstöfsiges Leben[2]) sich die Verachtung des Volkes zuzogen.

Die Reformation erhob die Schule, indem sie die Veredelung des Menschen als Ziel ins Auge fafste und Bibel und Klassiker zu den Quellen der Bildung machte. „So lieb nu alls vns das Euangelion ist / so hart last vns vber den sprachen hallten."[3]) Mit ihrer Aufforderung, Schulen zu errichten, wandten sich die Reformatoren nicht mehr an den Klerus, der nur Sinn für die Machtstellung der Kirche hatte, sondern an die auch andere als kirchliche Interessen ihrer Unterthanen vertretende weltliche Obrigkeit.[4]) In richtiger Erkennung ihrer Aufgabe greifen nun auch Landesfürsten und Stadträte das ebenso segensreiche als schwere Werk an, die für nützlich erachteten Ratschläge der Reformatoren auszuführen; die Fürsten erlassen Schulordnungen, die Stadträte gründen Schulen.

§ 2. **Lateinische Schulen.** Es ist ein nicht selten gehörter Irrtum, als wurzele die gegenwärtige Volksschule in den direkten Bestrebungen der Reformatoren das Schulwesen zu verbessern. Jene Bestrebungen sind jedoch ausschliefslich auf Hebung und Neugründung lateinischer Schulen[5]) gerichtet, damit man gelehrte Männer, tüchtig für kirchliche und welt-

---

1) Auf Kündigung bezügliche Bestimmungen findet man in Müller, Vor- und frühreformat. Schulordnungen SS. 12, 13, 33, 49, 51, 86, 298, 135, 191, 193, 101, 289, 247, 275.

2) Vergl. Thomas Platters Selbstbiographie 1572 in Raumer, Gesch. der Päd. 1872 I, 335 ff.

3) Luther, An die Radherrn . . . Wittenberg 1524, S. 11 (herausgeg. von Israel, Sammlung selten gewordener päd. Schriften 1879).

4) „Darumb lieben herrn / last euch das werck anligen / das Gott so hoch von euch foddert / das ewer ampt schuldig ist / das der jugent so not ist / vnd das wedder wellt noch geyst empern kan. Wyr sind leyder lang gnug ym finsternis verfaulet vnd verdorben. Wir sind allzu lange deutsche bestien gewesen. Last vns eynmal auch der vernunft brauchen." Luther, An die Radherrn S. 20.

5) „Und last vns das gesagt seyn / das wyr das Euangelion nicht wol werden erhallten / on die sprachen. Die sprachen sind die scheyden / darynn dis messer des geysts stickt. Sie sind der schreyn / darynnen man dis kleynod treyt. Sie sind das gefefs / darynnen man diesen tranck fasset. Sie sind die kemnat / darynnen dise speyse ligt. Sie sind die körbe / darynnen man dise brot vnd fische vnd brocken behellt. Ja wo wyrs versehen / das wyr (da Gott fur sey) die sprachen faren lassen, so werden wir nicht alleyn das Euangelion verlieren / sondern wird auch endlich dahyn geratten / das wyr wider lateinisch noch deutsch recht reden odder schreyben künden." Luther, an die Radherrn S. 12.

liche Ämter, und Frauen, geschickt zur Erziehung der Kinder, ausbilden möge.[1])

Melanchthon schreibt in dem kursächsischen Schulplane 1528 das Latein als Unterrichtssprache vor: „Vnd die schulmeister sollen selbs, soviel müglich nichts dann lateinisch mit den knaben reden, dadurch sie auch zu solcher vbung gewonet vnd gereitzt werden.“ Die Schulordnung für Stuttgart 1501 befiehlt dem Schulmeister, diejenigen Schüler, welche unter sich deutsch gesprochen hatten, mit schmaler Kost zu strafen. Sturm (1507—1589) und Trotzendorf (1490—1556), die gröfsten Schulpädagogen des 16. Jahrhunderts, betonen ausschliefslich die fremdsprachliche Bildung, weshalb deutsche Sprache, Geschichte, Geographie, Physik und Mathematik in Sturms Lehrplane keine Stelle haben, und von Trotzendorf, der in den Schulgesetzen vorschrieb, „die Schüler sollen nie ihre Muttersprache gebrauchen, sondern mit den Lehrern, Mitschülern und Gelehrten latein reden“[2]), rühmte man: „So hat er die römische Sprache allen eingegossen, dafs es für Schande galt, in deutscher Zunge zu reden; Knechte und Mägde konnte man latein sprechen hören, man hätte glauben sollen, Goldberg liege in Latium.“ Bei alledem hatte Luther nicht den Standpunkt eines engherzigen Philologen behauptet, sondern auch die übrigen Gegenstände nach Gebühr gewürdigt. „Wenn ich kinder hette vnd vermöchts / Sie müsten mir nicht alleyne die sprachen vnd historien hören / sondern auch singen / vnd die musica mit der gantzen mathematica lernen.“[3])

Unter Schule schlechtweg verstand man im Reformationszeitalter immer die lateinische Schule. Für die übrigen Schulgattungen bediente man sich einer der folgenden Bezeichnungen: scrifschole, Rechenschule, Jungfrawen- oder Mägdleinschule, dudesche Schule, Winkel- oder Beischule. Die hier genannten Schulen sind ebenso viele Schulgattungen, und es ist unrichtig, wenn — wie oft geschieht — dieselben nicht gehörig auseinander gehalten werden. Schon ihr Vorkommen nebeneinander[4]) beweist ihre Verschiedenheit.

---

1) „Wenn nu gleich keyn seele were / vnd man der schulen vnd sprachen gar nichts dürffte vmb der schrifft vnd Gottis willen. So wäre doch alleyn dise vrsach genugsam / die allerbesten schulen beyde für knaben vnd meydlin an allen ortten auffzurichten / das die wellt / auch yhren welltlichen stand eusserlich zu halten / doch bedarf feiner geschickter menner vnd frawen. Das die menner wol regiren künden land vnd leutt. Die frawen wol ziehen vnd hallten künden haus / kinder vnd gesinde.“ Luther, An die Radherrn S. 17.

2) Ähnliche Vorschriften über den Gebrauch des Latein als Unterrichts- und Umgangssprache kommen auch anderwärts vor. Siehe Müller, Schulordnungen SS. 82, 115, 140, 148, 162, 189, 176, 232.

3) Luther, An die Radherrn S. 18.

4) Aus der Paktverschreibung des Nördlinger Schulmeisters 1443: „Auch sol

Wie in den lateinischen Schulen das Latein den Hauptunterrichtsgegenstand bildete, so stand auch in der deutschen, der Rechen-, der Schreib-Schule je ein Gegenstand im Vordergrunde. In der deutschen Schule war dieser die deutsche Sprache d. h. deutsch Lesen; Schreiben schlofs sich später an; von der Rechenkunst wurde höchstens das Numerieren gelehrt (vergl. unten den arithmetischen Stoff in den ältesten deutschen Elementarbüchern). In den Schreibschulen bildete die Schreibkunst den bevorzugten Unterrichtsgegenstand, und manchmal (namentlich bei Erwachsenen) den einzigen. Im letzteren Falle handelte es sich dann nicht um die gewöhnliche Handschrift, sondern um Erlernung von Zierschriften aller Art und um Anfertigung von Geschäftsaufsätzen[1]), „breve" genannt. In den Rechenschulen wurde nur die Rechenkunst gelernt; wer hierher kam, mufste schon lesen und schreiben können, weil nur schriftlich gerechnet wurde. — Deutsche Schule und Schreibschule kommen hier und dort vereinigt vor, die Rechenschule ist aber immer eine von jenen getrennte Anstalt; auch dünkten sich die Rechenmeister etwas Höheres zu sein als die deutschen Schul- und Schreibmeister. Dafs allmählich auch in die deutschen Schulen das Rechnen als Unterrichtsgegenstand Eingang fand, bedarf kaum der Erwähnung.

§ 3. **Volksschule.** Die Anregung zur Gründung von Volksschulen ging zwar auch von den Reformatoren aus, aber mehr unbewufst als bewufst legten diese den Grund zu den Bildungsstätten fürs gemeine Volk. Die Katechisationen, welche nach der Kirchenvisitation durch die kursächsische Schulordnung 1528 den Pfarrern mit der Jugend abzuhalten anbefohlen wurden, sind die ersten Anfänge der heutigen Volksschule. Der Katechumenenunterricht wurde anfangs des Sonntags vom Pfarrer gehalten, dann auf die Woche verlegt und dem Küster übertragen. Die Katechismen gehören zu den ältesten Elementarbüchern[2]), der von Brenz erschien 1527,

---

nyemant kein teutsche schul hie haben, damit mir die knaben vfs der schul entzogen mögen werden, es were dann ob ein lantfarer käme, der ein monat vngeuarlich die kint schreiben lernen wölt, da solte ich nit yn reden allez vngeuarde." Müller, Schulordnungen S. 51. — Eine ähnliche Bestimmung traf man 1456 in Überlingen; siehe Müller, Schulordn. S. 69.

1) Hierzu gab es frühzeitig Hilfsbücher, Briefsteller nach moderner Bezeichnungsweise. Der älteste Briefsteller mit Jahrzahl erschien 1483 in Strafsburg unter dem Titel: „Formulare vnd Tutsch rhetorica"; Panzer, Annalen I S. 140. Wie beliebt diese Briefsteller waren, kann man aus der wiederholten Drucklegung schliefsen; Panzer zählt solche Drucke aus den Jahren 1491 (I S. 190), 1500 (I S. 246), 1501 (I S. 255), 1507 (I S. 282) und noch andere auf.

2) Das älteste noch erhaltene deutsche gedruckte Elementarbuch ist: „Eyn Bökeschen vor de leyen vnde kinder. De teyn Bade Gades. De loue mit eyner vthlegynge. Dat vade vnse mit eyner vthlegynge. Dat benedicite vnde gratias.

der von Lachmann und Gräter für Heilbronn 1528, der von Rürer und Althammer für Ansbach 1529. Das Evangelium bildete auch den ersten Unterrichtsgegenstand, Lesen und Psalmensingen traten später hinzu und Schreiben war das Höchste, was gelernt wurde. Da nun der Küster zum Schulmeister geworden war, so mufste bei Besetzung der Küsterstellen die Lehrtüchtigkeit zur Bedingung gemacht werden. Die Synode[1]) zu Heidelberg 1563 bestimmte demgemäfs, nur solche Glöckner anzunehmen, welche die Kinder den Katechismus zu lehren befähigt wären; die kursächsische Kirchenordnung 1580 will die Küsterstelle nur an des Lesens und Schreibens kundige Personen vergeben wissen; die pommersche Konsistorialordnung 1573 befiehlt den Küstern, sie sollen des Sonntags den Kindern und dem Gesinde Luthers Katechismus vorsagen und beten[2]) lehren.

Wie in der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts durch die Pflege des kirchlichen Lebens der Grund gelegt wurde zur Volksschule, so kam in der zweiten Hälfte durch Vertretung des konfessionellen Interesses, hervorgerufen durch die Spaltung der evangelischen Kirche, ein zweites Moment hinzu, den Bau zu fördern. — Da in jenem Zeitalter die Fürsorge für die Schulen vornehmlich ein Werk der Kirche und nicht des Staates war, so sind auch die auf die Schulen bezüglichen Bestimmungen den Kirchenordnungen einverleibt. Bahnbrechend für die Schulgesetzgebung wurde Kursachsen durch den von Melanchthon verfafsten „Vnterricht der Visitation ym Kurfürstenthum Sachsen, Wittenberg 1528", worin sich als Anhang der sächsische Schulplan befindet, den man an vielen Orten zum Muster wählte. Was Melanchthon bezüglich der Schulorganisation für Mitteldeutschland war, wurde Bugenhagen für die nördlichen Territorien und Brenz für Süddeutschland. Bugenhagen verfafste 1528 die braunschweigische, 1529 die hamburgische, 1531 die lübeckische, 1535 die pommersche, 1537 die dänische, 1542 die schleswig-holsteinische Kirchenordnung und traf die darin enthaltenen Schulbestimmungen nach Melanchthons Vorschlägen; Bugenhagens Anordnungen enthalten das Ideal der reformatorischen Schuleinrichtung. Die ausführlichste Schulordnung des 16. Jahrhunderts ist in der von Brenz verfafsten grofsen württembergischen Kirchenordnung 1559 enthalten.[3])

---

Van der Döpe. Van dem Sakramente. Van der Bycht. De düdesche tall mit den cifern. Dat titel bökeschen. Wittenberg 1525." Exemplar in Wernigerode. 1527 erschien es zu Erfforde als: „Der Leyen Biblia", Exemplar in Wolfenbüttel.

1) Heppe, Gesch. der Volksschule I, 26.

2) Das Recitieren des Katechismusinhalts war ein betweises Hersagen. Der Ausdruck „beten" hat sich in diesem Sinne bis heute erhalten; auf Dörfern sagt man für die Teilnahme am Konfirmandenunterrichte: „Sie gehen beten."

3) Die hier genannten Schulordnungen sind abgedruckt in Vormbaum, Evang.

§ 4. **Deutsche Schule.** Das Aufkommen der deutschen Schulen wurde überall vom Scholasticus aus materiellen Gründen gehindert. Der Magistrat zu Memmingen schuf deshalb 1469 durch eine Schulordnung eine Rechtsbasis für das Bestehen deutscher Schulen. „Item ain rat will zwo tütsch schulen hie haben und nit mer, nämlich aine, darfun man knaben, und aine, darfun man töchter lere.“[1]) — An einzelnen Orten war die Errichtung einer deutschen Schule rundweg verboten, so in Nördlingen 1472: „Auch soll niemant kain tutsche schul hie haben, damit mir die knaben vſs der schul mögen entzogen werden.“[2]) In Württemberg sollten sogar 1546 auf herzoglichen Befehl alle deutschen Schulen geschlossen werden.[3]) Die güstrowsche Schulordnung[4]) 1662 gestattet nur denjenigen, „so wegen ihrer ungeschickten Köpfe und Ingenia zum Studieren untauglich und deretwegen vom Rector Scholae ausgemustert sind“, den Besuch einer deutschen Schule, damit sie darin schreiben und rechnen lernen möchten.

Durch Aushängeschilder luden die deutschen Schulmeister zum Besuche ihrer Schule ein. Die Baseler Bibliothek bewahrt zwei derartige von Holbein 1516 gemalte Tafeln[5]) auf. Auf der einen sieht man Kinder mit ihren Büchern am Boden kauernd und den Schulmeister mit der Rute in der Hand einen Knaben am Katheder unterrichtend, während in der Ecke eine Frau ein Mädchen lehrt. Auf der anderen ist das Innere eines Schulzimmers abgebildet, in dem Jünglinge unterrichtet werden. Beide Tafeln haben folgende Unterschrift: „Wer jemand hie der gern wolt lernen dütsch schriben vnd läsen vſs dem allerkürtzisten grundt den jemand erdenken kann do durch ein jeder der vor nit ein buchstaben kann der mag kürtzlich vnd bald begriffen ein grundt dodurch er mag von im selbs lernen sin schuld vſſschriben vnd läsen vnd wer es nit zelernen kann so vngeschickt wäre den will ich vm nüt vnd vergeben gelert haben vnd ganz nüt von im zum lon nemen es syg wer er wil burger oder handwerksgesellen frouwen oder junkfrouwen wer sie bedarf der kumm har jn der wirt drüwlich gelert vmb ein ziemlichen lon aber die jungen Knaben vnd Meitlin noch der fronfasten wie gewohnheit ist.“

---

Schulordnungen Bd. I. — Die älteste gedruckte evang. Schulordnung ist die Zwickauer 1523, abgedruckt in Müller, Schulordnungen S. 234 ff. — Die braunschweigischen Schulordnungen von 1251—1828 enthält Monumenta Germaniae Paedagogica Bd. I.

1) Müller, Schulordnungen S. 302.
2) Müller, Schulordnungen S. 87.
3) Heppe, Gesch. der Volkschule II, 122.
4) Vormbaum, Schulordnungen II. Bd.
5) Fechter, Geschichte des Schulwesens in Basel 1837 S. 27.

Die deutschen Schulen teilten ihre Schüler gewöhnlich in drei Abteilungen (Sachsen, Württemberg), seltener in vier oder mehr (Braunschweig). „So[1]) der Schulmeister die Schulkinder mit nutz lernen will, soll er sie in 3 Häuflein teilen, das ein, so anfahen die Buchstaben, das ander, so anfahen die Syllaben zusamen schlahen, das dritte, so anfahen lesen[2]) und schreiben.“ Die Abteilungen kamen alle gleichzeitig zur Schule, der Unterricht war Einzel- nicht Massenunterricht, jeder Schüler kam an des Lehrers Pult und sagte sein Pensum auf, während die übrigen unthätig, lärmend oder schreibend dasafsen.

Über den Lehrstoff in der deutschen Schule giebt uns der Inhalt einer Handschrift (Cod. germ. 216) der Münchner Hof- und Staatsbibliothek Aufschlufs. Müller hat denselben auszugsweise veröffentlicht.[3]) Der arithmetische Teil umfafst darin eine Zusammenstellung der Münzsorten und Hohlmafse und einige Notizen über falsche Gulden.

Vom Rechnen war im Lehrplane der deutschen Schule fast nie die Rede. Wenn's hoch kam, lernten die Kinder die Ziffern schreiben und lesen und memorierten das Einmaleins. Die Wittenberger Kirchenordnung[4]) 1533 enthält folgende Bestimmung: „Nachdem sie lesen, schreiben und singen können, soll man sie mit der Zeit auch lernen Ciffern und etwas von der Arithmetica.“ Will man Kenntnis dieses „Etwas von der Arithmetica“ haben, so mufs man die ersten Lesefibeln, denen damals der arithmetische Stoff einverleibt war, zu Rate ziehen. Wir teilen hier diesen Stoff aus zwei derartigen Büchern mit und zwar aus dem, das ihn in knappster Form, und aus dem, das ihn in umfänglichster Form enthält.

In „Eyn Bökeschen[5]) vor de leyen vnde kinder ... Wittenberg 1525“ findet man nur eine Zusammenstellung von Zahlen, welche als Anweisung aufzufassen ist, wie man jede „deutsche Zahl“ (d. h. eine mit römischen Zeichen geschriebene Zahl) mit Ziffern (d. h. mit indischen Zahlzeichen) schreiben soll. Hier ist das Kapitel.

„Hyr volget na de dudesche tall mit den cifern.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i | ij | iij | iiij | v | vi | vij | viij | ix | x | xi | xij | xiij | xiiij | xv | xvi |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| xvij | xviij | xix | xx | (etc. fortlaufend bis) | cx | (dann folgen noch) | cxx |
| 17 | 18 | 19 | 20 | | 110 | | 120 |

1) Württemberger Schulordnung 1559 in: Vormbaum I, 160.

2) Die damalige Lesemethode ist beschrieben in Schultheifs, Gesch. der Schulen in Nürnberg II, 14—19.

3) Müller, Quellenschriften S. 329 im IV. Bd. von Kehr, Gesch. der Methodik.

4) Vormbaum I.

5) Exemplar in Wernigerode.

cxxx cxl cl clx clxx clxxx cxc D , M
130 140 150 160 170 180 190 500 1000. Hyr volget dat titel Bökeschen. Dem Keyser."

„ENchiridion[1]): das ist Handbüchlin tütscher Orthographi h'chtütsche sprach artlich zeschryben vnd läsen sampt eynem Registerlin über die gantze Bibel ... Auch wie man die Cifer vnd tüdtsche zaal verston sol durch Joannem Kolrofs tüdtsch Leermeystern zu Basel. M.D.XXX" enthält folgendes arithmetische Kapitel[2]):

„Die Cifer zeerfaren vnd zelernen.

Zů dem ersten solt du wissen / dz in der gantzen Ciferzaal nit meer dann zehen figuren sind / durch die sy beschriben würt / Namlich Neün bedüdtlich / als 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. vnd ein vnbedüdtliche glych dem stimmbuchstaben o (0) Difse figur heyfst drumm vnbedüdtlich / das sy nichts thut wo sy für sich selbs allein stodt / der halb sy ouch nulla genant / So sy aber by andren bedüdtlichen figuren stodt / macht sy' die selbigen meer bedüdten / als 1 bedüdt eins / setz die vnbedüdtlich figur / genant nulla / dafür also 10. so bedüdt es zehene / Also ouch mit allen andren / [etc. bei 2, 3 und mehr Nullen bis] 9000000 ist nün tusent mal tusent. ... Hie sihest du wol das die nullen nichts heyssend für sich selbst / sy geben aber den bedüdtlichen figuren (denen sy zugesetzt werden) ein statt durch welche sy gemeert / vnd ir bedüdtung empfahend / als ein null meeret ir bygesetzt bedüdtlich / mit so vyl zehen / als sy für sich selbst heyst vnnd thut / zwo nullen meerends mit so vyl hunderten. Dry nullen mit so vyl tusenten ... so für vnd für on end / dann die zaal hat kein end. So vyl sey gesagt von den nullen. Nun mit den nün bedüdtlichen figuren / namlich 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. hat es die gestalt. So man über die zehende zaal (welche mit der nullen gemacht) zeelen will / so mufs man die nün gemellten figuren widerumb ruchen / diewbyl nit meer cifern sind / Damit du nun wissest / so zwo. iij. iiij. v. vj. oder vij figuren nach einander stond / was ein yede figur thu / so meerk eben.

Zů dem ersten solt du wissen / das als vil der figuren (bedüdtlich oder vnbedüdtlich) ordenlich nach einander stond / die mit keinem puncten (dz ist tüpfflin) vnderscheydet sind / so vyl stett hatt die selbig zaal.

Zů dem andren solt du mercken / das man die stett anhept zerechnen von der rechten hand vnd feert hindersich gegen der lincken / vnd heifst die erst cifer gegen der rechten / die erst statt / die ander glych hernach / die ander vnd die drit / die dritt statt / die vierd / die vierde / vnd also nach vnd nach bifs vff die letste statt / das ist / bifs vff die erste gegen

1) Abgedruckt in Müller, Quellenschriften S. 64—91.

2) Ebenda S. 89—91.

der lincken hand. Das man aber von der rechten zu der lincken feert/ das kumpt von der natürlichen bewegung här / dann was wir mit den ougen besähen / vnd mit der hand thun wellen / als houwen / schlahen/ stächen / wärffen oder säyen / dz geschieht alles natürlich von der rechten zur lincken / darumb ouch die Ebreer vnd Chaldäer (von denen die zaal erfunden) von der rechten gegen der lincken schrybend.

Zum dritten solt du wissen / das ein yegkliche vnder den nün figuren an der erstern statt / sich selbst ein mal bedüth / als 1. bedüth eins / 2. bedüth zwey ... [etc. bis 9]. So aber difser figuren eine an der anderen statt / stodt / so bedüth vnd thut sy sich selbs zehen mal 1 ... [an der 1. bis 3. nachgewiesen; dann] so für vnd für / was für ein cifer an der andere statt stodt / die thut so vyl zehene als sy sunst für sich selbs heyfst vnd thut. Hie merck das so zwo bedüdtlich figuren an den zweyen ersten stetten stond / soll man sy mit einander vfssprechen / als 29. ist nün vnd zwentzig / 31. ist ein vnnd dryssig / 99. ist nün vnnd nüntzig.

Item wz für ein figur an der dritten statt stodt / die thut sich selbs hundert mal / das ist / sy thut so vyl hundert / als sy für sich selbst heyfst / als 529. das ist / fünff hundert xxix. vnd sol das hundert allweg allein vfsgesprochen werden. Item an der vierden statt bedüth sich eyn yede figur selbst tusent mal / als 1529. das ist M. D. xxix. Item 9999. ist ix tusent. Dcccc. xcix. Hie merck aber das man an der vierden statt widerumb anhept vffstygen (glych wie im anfang von der ersten statt bifs vff die vierde) eins / zehen / hundert / tusent / vnd das in sinem wärd / das ist / von eim tusent bifs vff tusent mal tusent / vnd würt dann die vierd statt widerumb für die erst / in sinem wärd gerechnet / dorumb setzen ettlich ein puncten drob / als 1145632. was nun an der vierden vnd fünfften statt für bedüdtlich figuren stond / soll man ouch (wie die erst vnd ander statt) mit einander vfssprechen. Was dann an der fünfften statt stodt / bedüdt sich selbs zehen mal tusent / an der sechsten / hundert mal tusent / vnd an der sibenden statt hept man aber an vffzestygen / vnnd feert also für vnd für on end / ist nit not hie vyl daruon zeschryben / welcher rechnen will lernen / der würt wol von sinem meyster wyter vnderricht werden.

Zum vierden solt du wissen / wie wol man die stett zu zeelen / vnnd vfszerechnen / von der rechten / zu der lincken anhept / sol doch das vfssprechen / von der lincken zu der rechten gschähen.

Exemplum

| | M | D | xx | ix | |
|---|---|---|---|---|---|
| Lincke | 1 | 5 | 2 | 9 | rechte hand |
| | die vierd | die dritt | die ander | die erst statt | |

Zum fünfften solt du ouch wissen / wo die cifern mit puncten verzeychnet vnd vnderscheydet sind / das zwüschen yedem puncten ein besonder zaal ist | vnd werden nit alle zusamen in ein Summ gezeelt / sunder ein yegklichs (wie es verzeychnet vnnd mit dem tüpfflin vnderscheydet) würt für sinen wärd gezeelt / vnd geschicht soͤllichs offt in den concordantzen / als do in eim buch oder epistel an vyl enden oder capiteln / von einerley geschriben stodt / do würt ein yedes capitel / oder ort mit eim puncten vnderscheydet. Exemplum. von der forcht Gottes lifst man Deut. am 4. 6. 10. 17. 31. verstand capitel. Item ... [Beispiele].

Zuͦ eim beschlufs will ich den einfalltigen so nit begaͤren zulernen rechnen | ein lychten waͤg zeygen die vier stett zeerkennen / in welchèn die iar zaal sydt der geburt Christi / ia ouch von anfang der welt (vnd wol ze mutmassen byfs zu end der welt) begriffen ist / vnd würt / vnd das also / So vier bedüdtlich Figuren ordenlich nach einander gesetzt sind on vnderscheyd (das ist / do kein punct dar zwüschen stodt) So heb by der lincken an vnd fahr gegen der rechten / vnd was die erst cifer gegen der lincken für sich selbs thuͦt / so vyl tusent thut sy an derselben statt / vnd die nächst darnach gegen der rechten so vyl hundert / die dritt so vyl zehene / die vierd (das ist die erst by der rechten) stodt für sich selbst ein mal.

Damit nun ein einfalltiger soͤllichs dester bafs verstand / hab ich hie nach ein Exempel gesetzt in einer Figur.... [Das Exemplum ist dem obigen ähnlich, verwendet sind die Zahlen 1529, 1530, 6728, 8900, 8010.]

Ein Tafel über die cifer von eim bifs vff tusent mol tusent.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. |
| 10. | 11. | 12. | 13. | 14. | 15. | 16. | 17. | 18. | 19. |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| 90. | 91. | 92. | 93. | 94. | 95. | 96. | 97. | 98. | 99. |

[dann] 100. 200. [bis] 2000000; [darnach 7 beliebige noch gröfsere Zahlen].

Von der gemeynen tüdtschen zaal ouch ein kurtzer bericht.

Die gemein tüdtsch zaal würt durch siben buchstaben vfs dem abc beschriben / namlich durch j. v. x. l. c. d. vnd M. Dann ein j thuͦt eins, ij. thuͦt zwey, iij. drü ... Hie merck aber ein gemeine regel / was über fünffe bifs vff zehene ist / würt durch j. gemeeret / als vj. vij. viij. viiij. oder also ix. was aber über zehne / bifs vff tusent / würt mit dem j. v. vnd x gemeeret. Exemplum. xj. xij ... Item l. lj ... also ouch c. cj....

Doch solt du wissen so ein i. gegen der lincken vor dem x. stodt / also ix. so nimpt es dem x. eins ab .... also ouch was vor dem l. vnd c. gegen der lincken stodt / das thund sy minder denn ir bedüdtung ist / als xl. thůt viertzig / xc. thut neüntzig . . .

Ein Tafel der verglychung tüdtscher vnd ciferzaal.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| i | 1 | xxv | 25 | xlix | 49 |
| ij | 2 | xxvj | 26 | l | 50 |
| . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . |

etc. in drei Kolumnen die doppelten Zahlen bis 113 fortlaufend, dann noch die Hunderte, von 500 an in dreifacher Schreibweise: $v^c$, D, 500; darauf noch: M, $ij^m$, $iij^m$, $x^m$, $c^m$, dann: „M. thut tusent / wie ob stat / so aber ein c. gegen der lincken im glych stodt / also CM. so nimpts im hundert ab / wans aber also stodt / $C^m$. so bedüdts hundert tusent etc.“

Aus Vorstehendem erhellt, dafs die arithmetische Belehrung in den deutschen Schulen nur die Erklärung des Positionssystems und das Numerieren umfafste.

Damit nun der Leser dieses Minimum alles Rechnens nicht gar zu gering achten möge, lassen wir einen Paragraphen über Einführung und Ausbreitung der indischen Ziffern im Abendlande folgen. Aus den in Aussicht gestellten Nachrichten wird man sogar die Überzeugung von der Notwendigkeit jener minimalen arithmetischen Belehrung gewinnen.

**§ 5. Einführung und Ausbreitung der indischen Ziffern im Abendlande.** Die Einführung[1]) der indischen Ziffern nach Europa ist noch eine ungelöste Streitfrage, die uns aber hier nicht berührt. Die ältesten in Deutschland nachgewiesenen indischen Ziffern sollen dem 10. Jahrhundert angehören[2]); indessen gebührt das gröfste Verdienst um Einführung dieser Zahlzeichen und des Rechnens mit denselben dem Pisaner Leonardo Fibonacci[3]) 1202. Dafs aber die indischen Zahlzeichen und die neue Rechnungsweise nach diesem Zeitpunkte bald Volkseigentum geworden wäre — wie manche behaupten —, läfst sich durchaus nicht erweisen. Das ge-

---

1) Siehe hierzu: Zeitschrift für Math. u. Phys. I, 65—74. — Friedlein, Gerbert, Die Geometrie des Boetius und die ind. Ziffern 1861 S. 59 ff. — Treutlein, Geschichte unsrer Zahlzeichen, Karlsruhe 1875. — Cantor, Vorlesungen 1880 I, 610.

2) Friedlein, Gerbert S. 41.

3) Friedlein, Gerbert S. 42. — Desgl. Ersch und Gruber XXXXIII, 445. Das arithm. Werk des Leonardo Fibonacci „Il liber abbaci 1202“ wurde 1857 von Boncompagni in Rom herausgegeben als I. Band von „Scritti Leonardo Pisano“.

meine Volk bediente sich vielmehr nach Leonardo noch drei Jahrhunderte lang der römischen Zahlzeichen, welche um 1500 in Deutschland geradezu „deutsche Zahlen“ im Gegensatze zu den „Ziffern“ hiefsen.

Vor dem 15. Jahrhundert lassen sich für das Vorkommen indischer Ziffern aufserhalb des Abacus nur wenige Spuren entdecken. Heinrich Hoffmann sagt in seiner Handschriftenkunde: „Im 15. Jahrh. findet man die indischen Ziffern mitunter bei Jahrzahlen und Registern zu Handschriften, in Rechnungsbüchern und Urkunden aber noch selten. Auf öffentlichen Denkmälern von Erz und auf Gemälden lassen sie sich in Deutschland vor dem 15. Jahrh. nirgends nachweisen.“ — Zu ähnlichen Ergebnissen gelangte Denzinger, der den Gebrauch der indischen Ziffern im Würzburgischen verfolgt und darüber sehr dankenswerte Mitteilungen veröffentlicht hat.[1]) Er erörterte die Fragen: wann hat in Unterfranken der Gebrauch der indischen Ziffern begonnen? welche Formen derselben brauchte man anfangs? welche andre nahm man dann an? um welche Zeit wurde ihr Gebrauch allgemein? — Auf Gebäude, Denkmäler, Rechnungsbücher, Protokolle, Münzen erstreckte er die Untersuchungen, deren Resultate er selbst in folgenden Sätzen[2]) zusammenfafst: „1) Es wird kaum möglich sein zu beweisen, dafs vor dem 15. Jahrh. bei uns der Gebrauch der indischen Ziffern statt hatte. 2) Der Gebrauch der indischen Ziffern begann erst gegen die Mitte des 15. Jahrh., zuerst auf Denkmälern, dann an Kirchen und Privatwohnungen. 3) Die Monumente mit indischen Ziffern nehmen im 16. Jahrh. bedeutend zu. 4) Im 16. Jahrh. erscheinen diese Zahlzeichen auch in Rechnungen, zuerst blofs im Vortrag, nie in den Hauptteilen der Rechnungen, erst gegen 1566 treten sie in den ganzen Bau der Rechnungen ein, wo sie den Gebrauch der römischen Zeichen verdrängten. Nur in sehr wenigen Rechnungen finden sich Spuren indischer Zeichen gegen das Ende des 15. Jahrh. 5) In Protokollen erscheinen indische Ziffern erst gegen die Mitte des 16. Jahrh. und werden gegen das Ende desselben gebraucht. 6) Auf Münzen findet man sie schon gegen das Ende des 15. Jahrh.“

Nicht wesentlich anders als im Würzburgischen wird auch anderwärts die Beantwortung der Frage über Einführung und Fortgang des Gebrauchs der indischen Ziffern ausfallen; indessen sind zur Verallgemeinerung des Urteils derartige Aufzeichnungen, wie sie Denzinger gesammelt hat, aus allen Gauen Deutschlands von nöten. Einen kleinen Beitrag zur Erledigung der Frage liefern auch folgende einzelne Nachrichten.

---

1) Archiv des hist. Vereins von Unterfranken und Aschaffenburg, Würzburg 1848, Bd. IX, Heft II, 160—184.

2) Denzinger bringt zahlreiche Belege zu diesen Sätzen a. a. O. bei.

In einer Regensburger Chronik vom Jahre 1167 fand man die Zahlen 1—68 wie zur Übung geschrieben.[1]) In einem Notatenbuche des Dithmar von Meckelbach in Schlesien aus der Zeit Kaiser Karl IV. (1346—1378) stehen zwar die 10 indischen Ziffern, in den Einnahme- und Ausgabespalten aber die römischen Zeichen.[2]) Der Rechnungsauszug aus dem Rechnungsbuche des Strafsburger Stifts, welcher Gutenbergs Schulden von 1458—1474 umfafst, enthält nur römische Zeichen[3]); ebenso enthalten die Buchholzer (in Sachsen) Bergrechnungen von 1509—1516 und 1543 nur solche.[4]) In den Ausgaberegistern der Kreuzschule zu Dresden bis 1539 überwiegen auch die römischen Zeichen.[5]) Von der gleichen Thatsache kann man sich durch Einblick in Müllers Sammlung überzeugen, welche 128 Schulordnungen[6]) und Schulverträge in deutscher und niederländischer Sprache aus der Zeit von 1296—1523 enthält.

Kalender, welche unter den Volksbüchern den ersten Rang einnehmen, aus den Jahren 1457, 1460, 1483, 1486, 1493, 1496 weisen sämtliche Zahlen in römischen Zeichen auf.[7]) Im grofsen römischen Kalender, welchen Jacob Köbel 1518 ins Deutsche übersetzte[8]), stehen zwar auf den Tafeln (aus Raumersparnis) indische Ziffern, im Register, zur Blattnumerierung und im erklärenden Texte aber nur römische. Auch in einer anderen Art von Volksbüchern, den Praktiken[9]), trifft man nur römische Zeichen. Eine Praktika enthielt im allgemeinen Prophezeiungen über Krieg, Krankheiten, Mifswachs, gegründet auf die Konstellation der Gestirne.

Köbels Visierbuch[10]) 1515, welches für die Weinhändler bestimmt war, enthält nur auf den angehängten Tafeln indische, sonst überall (Register, Vortrag, Blattnumerierung) römische Zeichen. Ja Köbel hat sogar in seinem für den häuslichen Gebrauch bestimmten Rechenbuche[11]) ausschliefslich römische Zeichen verwendet; ausgenommen ist nur die Stelle, an welcher ausdrücklich die „Zifferzal“ durch die „deutsche Zahl“ (= römische Zeichen) erklärt wird. Ein Exempel[12]) sieht so aus: „Ich setz ein Register zu Sumiren mit inhaltung sollicher wie hiernach volgen.

---

1) Schmidt, Encyklopädie VI, 726. 2) Ebenda VI, 726.

3) Faulmann, Gesch. der Buchdruckerkunst S. 109.

4) Berlet, Über Ad. Riese 1855. Programm.

5) Meltzer, Die Kreuzschule zu Dresden 1886.

6) Müller, Schulordnungen 1885 u. 1886.

7) Fischer, Typogr. Seltenheiten.

8) Jacob Köbel, Der Newe grofs Römisch Kalender .... Oppenheim 1518. Exemplar in Leipzig, Universitätsbibl.

9) Joh. Virdung von Hafsfurt, Hofmathematiker des Pfalzgrafen Ludwig bei Rhein hat mehrere verfafst; Exemplare in Leipzig, Universitätsbibl.

10) Mehr darüber steht unten.

11) „Das new Rechēpüchlein ...“ 1518. 12) Ebenda Bl. XIII.

Item XXVII gulden vor ein Affen
„ XII Albus dauon zu weinkauff in Schnörges haufs
„ II lb IIII ß III hlr vor fawl Eyer
„ I lb XVI ß vor Stinckenden Buttern
„ VIII gulden vor Nyefswortz
„ XII Albus dauon zu zoll
„ IIII Albus vor Grintsalben
„ VI hlr vor C Stecknolen
„ VIII ß vor Nafswasser
„ XVI hlr vor ein lb Affenschmere“ etc.

In der Bruchlehre springt die Schwerfälligkeit des römischen Systems noch mehr ins Auge: „Wiltu Summiren[1]) Als $\frac{II}{III}$ zu $\frac{III}{IIII}$ so schreibe sie creutzweifs vnder die Linien [= Rechenbank] also $\frac{II}{III} \times \frac{III}{IIII}$ Vnd manchfaltig die creutzweifs also / sag III mal III ist IX vnd II mal IIII ist VIII. die VIII vnd IX leg zusamen / so wirt es XVII. vnd ist der zeler. darnach mangfaltig die Nenner auch durch eynander also III mal IIII ist XII die XII schreib vnder die XVII vnd mach ein strichlein darzwischen stet also $\frac{XVII}{XII}$ vnd ist recht gemacht vnd helt in̄ ym ein gantz vnd $\frac{V}{XII}$.“ — Ein Beispiel fürs Kürzen: „$\frac{CCCCXXXII}{CCCCCLXXVI}$ ist als vil als $\frac{III}{IIII}$.“

Im Orbis pictus steht: „Die Bauern zählen mit Kreuzen und halben Kreuzen.“[2]) (Also Zehnen X und Fünfen V.) Hiervon dürfte das Sprichwort: Du willst mir ein X für ein U (früher schrieb man ja V für U) machen, seinen Ursprung haben.

Das älteste bekannte Buch, in dem die indischen Ziffern zur Numerierung der Blätter angewendet worden sind, ist: „Liber[3]) de remediis utriusque fortunae Coloniae, Aroldus ter Hoernen, Köln 1471“ (ein Werk Petrarcas).

Aus den angeführten Nachrichten geht unzweifelhaft hervor, dafs ums Jahr 1500 die indischen Ziffern noch nicht Volkseigentum geworden waren. Im Lichte dieser Thatsache fällt auch das Urteil über den eigenartigen arithmetischen Stoff in den Lesefibeln nicht so ungünstig aus, als es anfangs schien. Wir sehen in der Erklärung der mit indischen Ziffern geschriebenen Zahlen durch römische Zeichen nur ein Moment des Kampfes, den die indische Rechnungsweise bei ihrem Eindringen noch um 1500 gegen die römische zu bestehen hatte.

1) „Das new Rechēpüchlein“ Bl. XXIII ff.
2) Amos Comenii Orbis sensualium pictus ... Ausgabe von 1805, S. 341.
3) Fischer, Typogr. Seltenheiten.

§ 6. **Scrifschole und Schreiber.** In gröfseren Handelsstädten waren sehr früh Schreibschulen errichtet worden. Wir haben bereits (§ 2) bemerkt, in welcher Bedeutung die Schreibschule als besondere Schulgattung aufzufassen ist, und in welcher sie mit der deutschen Schule zusammenfällt. Das Bestallungsdekret des Schreibmeisters von Winterthur 1416 bestätigt diese Ansicht: „Der schriber hat versprochen einem rat by siner trüw an eides statt, einen jegklichen, der ihm zugesetzt wird, getrüwlich zu leren, in eim monat zeschriben ein solich gut geschrift, damit er sich fürgetragen mag fürsten, herren vnd stetten, vnd das er einen darinnen nichts bergen soll, by sinen trüwen. Vnd wär, das einer vorhin nützid kündt odir sust alz vnwisig wäre, dem welli er ein wuchen zu dem monat zugeben, das er so die geschrift sölli können."[1])

Die Schreibkunst genofs im Mittelalter ein weit höheres Ansehen als heute, was vor dem Buchdruck nicht wunderbar erscheint. Sämtliche Schreiber jener Zeit gruppiert Wattenbach[2]) unter die drei Titel: Mönche, Kanzelisten und Lohnschreiber; wir fügen noch die Gruppe „die schreiber auf der schule" hinzu. Das Abschreiben von Büchern durch Mönche[3]) ist allgemein bekannt. Es brauchte aber auch jeder Mann von Bedeutung einen Beamten, der ihm seine Briefe schrieb und las. Protonotarii[4]) hiefsen die Schreiber der Fürsten, Stadtschreiber auch Stuhlschreiber nannte man sie in der städtischen Verwaltung.

Zu den Lohnschreibern gehören vornehmlich die fahrenden Schreiber[5]) und Modisten. Erstere zogen von Ort zu Ort und erteilten kurze Schreibkurse (1 bis 2 Monate). Letztere sind die Kunst- und Schönschreiber und bilden die beste Klasse der Schreiberzunft. Sie besafsen das Geschick, allerhand kunstvolle und zierliche Schriftarten[6]) herzustellen, sie zogen nicht umher. Doppelmayr erwähnt[7]) als Nürnberger Modisten: Joh. Neudörffer[8]) den Älteren, Joh. Neudörffer den Jüngeren, Antonius Neudörffer

1) Müller, Schulordnungen S. 272.

2) Wattenbach, Das Schriftwesen im Mittelalter 1875.

3) Ausführlich bei Wattenbach, Schriftwesen S. 359—385.

4) Der Scholasticus Herman Dwerghe, mit dem 1418 der Vertrag wegen der vier lübeckischen Schreibschulen geschlossen wurde, war „prothonotarius des romeschen stoles"; Müller, Schulordnungen S. 35. — König Wenzel bat den Papst um Pfründen für die „honorabiles protonotarii, registratores atque scriptores litterarum nostrarum regalium"; Wattenbach a. a. O. S. 386.

5) Vgl. oben S. 5 Note 4. — Ein weiterer Beleg in Müller, Schulordnungen S. 279.

6) Proben sind zu finden in: Faulmann, Gesch. d. Buchdruckerkunst S. 281. — Ebenso in Müller, Quellenschriften S. 352.

7) Doppelmayr, Histor. Nachricht .. S. 201, 204, 217.

8) Er ist der Schöpfer der Fraktur; siehe Faulmann S. 279. — Schultheifs, Gesch. der Schulen in Nürnberg II, 3 u. 20.

und Paul Kaufmann. Im 16. Jahrhundert blühte überhaupt unter Paul Fischer in Nürnberg eine Schule der Modisten.

Die Lohnschreiber übten nicht nur Lohnschreiberdienste, sondern auch notarielle Funktionen aus, indem sie für Illitteraten Briefe, Formulare und andere Schriftstücke anfertigten.

Nicht selten widmeten sich die Modisten und Stadtschreiber auch dem Lehrgeschäfte, indem sie eine Privatschule eröffneten; so wird zu Frankfurt a. M. 1421 Heinze[1]) als „schriber der modiste“ und 1423 als „kindelerer“ bezeichnet. In Rotterdam wurden 1328 das Schulamt und Stadtschreiberamt durch Graf Wilhelm von Henegau an Peter Haren[2]) verliehen, und durch ebendenselben 1342 an Claus Merren.[3]) Der Ratsstuhlschreiber zu Freiberg in Sachsen hat bis 1830 Unterricht im Lesen, Schreiben und Rechnen erteilt.

Am Ausgange des Mittelalters wurde der Titel Modist nicht nur zur Bezeichnung eines Schreibkünstlers, sondern auch noch in andrer Bedeutung gebraucht. Über Modista als Lehrer der modi significandi und über die Bezeichnung der Musiklehrer mit dem Titel Modisten sei auf einen von Joh. Müller verfafsten Artikel[4]) verwiesen.

Schreiber auf der Schule, auch Schulgesellen oder Locaten, wurden diejenigen genannt, welche sich auf das Lehramt vorbereiteten[5]), und auch die schon Ausgelernten, welche bei einem Schulmeister oder einer Schulmeisterswitwe als Gehilfen[6]) dienten; Seminaristen und Hilfslehrer würden moderne Bezeichnungen für jene „Schreiber“ sein. Diese Schreiber wurden vom Scholasticus auch zu mancherlei Nebendiensten[7]) herangezogen.

Wie die deutschen Schulmeister, so boten auch die Schreibmeister durch ein Aushängeschild dem Publikum ihre Dienste an. Den Wortlaut des ältesten derartigen Dokuments, welches noch gerettet ist, hat Wattenbach veröffentlicht.[8])

Diejenigen Schreibmeister, welche Kinder lehrten, waren praktischer Bedürfnisse halber genötigt, gleichzeitig auch Leseunterricht zu erteilen; denn die Eltern konnten ihre Schüler wegen zweier Fächer doch nicht in zwei verschiedene Schulen schicken. Sobald dann das Schreiben der Ziffern an die Reihe kam, brachten die Schreibmeister ihren Schülern

1) Müller, Quellenschriften S. 320.
2) Müller, Schulordnungen S. 13.
3) Ebenda S. 15.
4) Anzeiger für Kunde der deutschen Vorzeit 1878 Sp. 234 ff. und 354 ff.
5) Schultheifs a. a. O. II, 31.
6) Ebenda S. 32.
7) Siehe hierzu Meltzer, Die Kreuzschule zu Dresden bis 1539, S. 24, 25, 48, 51. — Desgl. Müller, Schulordnungen S. 22, 23, 115, 116, 126, 127.
8) Wattenbach, Schriftwesen S. 413.

auch den „Verstand der Ziffern“ d. h. das Numerieren bei und schlossen eventuell auch „Etwas von der Arithmetika“ (siehe § 4) an.

Über kaufmännischen Rechenunterricht in Schreibschulen ist uns nur eine einzige urkundliche Stelle begegnet. Der Schreib-, Rechen- und Sprachmeister Jacop van Scoenhoven zu Amsterdam hatte sich mit einer Bittschrift an den Rat gewandt, weil er sich mit seiner Familie von der Schreibschule nicht ehrlich unterhalten könne. In der Antwort des Rats 1509 heifst der letzte Artikel: „Item dat nyemant masculini sexus tot synder schoelen en sal moghen coomen, dan die ghene, die hem alleelycken willen begeven tot bryefture in duytsche oft in franchoise te leeren lesen ende scriven ende tot rekenen te leeren mit tgene dat totte coopmans scape dienen mach.“[1])

Als die ältesten Scrifscholen werden die vier lübeckischen, je eine in den vier Kirchspielen genannt. Ihre Gründung scheint bald nach 1300 erfolgt zu sein.[2]) Der Scholasticus zu Lübeck erhob Widerspruch gegen ihr Bestehen und erwirkte sogar das Interdikt. Jedoch wurden 1418 durch einen Vertrag zwischen Rat und Scholasticus die Streitigkeiten beigelegt, und das Bestehen der Schreibschulen war von da ab gesichert unter folgenden drei Bedingungen: dafs die Zahl genannter Schulen höchstens vier sei, dafs der Unterricht auf deutsch Lesen und Schreiben beschränkt werde, und dafs man dem Scholasticus den dritten Teil des Schulgeldes zufliefsen lasse.[3]) — Im Jahre 1420 wurde zu Braunschweig durch Vertrag zwischen Magistrat und Scholasticus die Errichtung von Schreibschulen unter der Bedingung als zulässig erklärt, dafs sich der Unterricht nur auf deutsch Lesen, Schreiben und Briefstil erstrecke.[4])

Das Gründungsjahr der vier Hamburger Schreibschulen ist nicht festgestellt, liegt aber vor 1400; denn auf Veranlassung des Scholasticus verbot 1402 Papst Benedikt IX. unter Androhung von Bann und Interdikt die Eröffnung derartiger Schulen.[5]) Trotzdem bestanden diese unter dem Schutze des Rates fort, und 1456 wurde „een eendracht gemaket van

1) Müller, Schulordnungen S. 340.

2) Heppe, Schulwesen des Mittelalters S. 38. — Müller, Schulordnungen S. 38.

3) „bynnen Lubeke scholen uthgenomen de schole veer schole wesen, dat scryveschole synt ghenomet, dar men allenen schal leren kindern lesen vnde scryven in dem dudeschen unde anders nerghen ane ... Item dejenne, de sodanne scholen hebben unde regeren, de scholen dem herrn scolastico one alle vormynderinghe unde alle bedrechnisse antwerden unde overgheven den drudden pennyngh des lones dat se entfanghen van den scryvescholeren unde de andere twe parte de scholen se vor syk ane alle jeghensproke beholden“; Müller, Schulordnungen S. 36—37.

4) Ebenda S. 43.

5) Ebenda S. 72.

deme capittele vnde rade to Hamborch, tzwischen meyster Theodorico Wichmann, alsse enem scholastico, vnde den borgheren van der scolen weghen to Hamborgh."[1]) Die Bedingungen waren dieselben wie in Lübeck und Braunschweig.[2]) — Etwa 50 Jahre später wurde in Hamburg die Nikolaischule mit einer deutschen Schule verbunden, welcher die Hamburger Kirchenordnung[3]) 1529 Art. VI mit folgenden Worten gedenkt: „Id ifs vör gudt angesehen, dat eene dutsche Schole werde geholden in S. Niclas Schole. De Meister mit twe anderen Hülpen scholl de Schole fry hebben, un wat thom Gebuwte gehöret, Wohnungen schölen se ock darinnen hebben, davör schölen se schuldig syn, ock wat Christlicks ehren Schölern tho lehren, ock christlicke Gesänge. Ehren Sold auerst schölen se nehmen von eren Schölern. De Vorwesern, de de Schole buwen, schölen de Schriff-Meister annehmen und verlohnen, ock darup sehn, dat he solcke Hülper holde un belohne, de tho solcker Sacke verständig vnd moghaftig synd."

Ziehen wir das Resumé, so ergiebt sich, dafs die deutschen und die Schreibschulen nur unter dem Widerstande des Scholasticus errichtet werden konnten, weil sich bei der eignen Schulgelderhebung durch den Abgang von Schülern dessen Einkommen verminderte. Der Vergleich kam dann dahin zustande, dafs der Scholasticus einen Teil des Schulgeldes zog, sich das Bestätigungsrecht des Schul- und Schreibmeisters vorbehielt, die Unterrichtsgegenstände auf deutsch Lesen, Schreiben und Briefstil beschränkte und die Schule zeitweilig visitierte.

§ 7. **Mädchenschule.** Neben der lateinischen und deutschen Schule für Knaben kennt das 15. und 16. Jahrhundert auch schon eine Mägdlein- oder Jungfrauenschule.[4]) Diese war nicht für alle, sondern nur für die Töchter aus höheren Ständen bestimmt, um ihnen dasjenige Mafs von Wissen zu geben, welches sie geschickt mache zur Führung des Hauswesens und Erziehung der Kinder und des Gesindes. Die Jungfrauen sollten

---

1) Müller, Schulordnungen S. 69.

2) Ebenda S. 70—71.

3) Vormbaum, Schulordnungen I. Bd.

4) Aus der Braunschweiger Kirchenordnung 1528: „Die Jungfrawenschulen seindt sehr nützlich vnd wol erdacht, darumb sollen die Bürger ihre Töchter darinnen Lesen, Schreiben, Bethen vnd Christliche Gesenge lernen lassen." Vormbaum I, 229. — „Über das (der Thomas- und Nikolaischule) seindt vier deutsche Schulen / da die knaben nur rechnen und fein reinliches schreiben lernen / Desgleichen auch etzliche Jungfraw Schulen / darinnen die Meydlein Beten / Singen / Lesen / Schreiben / Nehen vnd wirken / auch feine höffliche vnd züchtige geberde von ihren Schulmeisterin gelehret werden." Aus: „Wahrhaftige Beschreibung der Stadt Leiptzigk", Ulrich Grofse 1587; Handschrift der Stadtbibl. Leipzig. Rep. II S. 139.

nur eine oder zwei Stunden täglich und auch nur einige Jahre zur Schule gehen; sie wurden von Lehrfrauen unterrichtet und zwar im Lesen, Schreiben, Beten und feinen Sitten. Rechnen lernten sie nicht.

Die Existenz von Mädchenschulen vor der Reformation läfst sich für viele Orte nachweisen, so für Mainz[1]) um 1300, Brüssel[2]) 1302, Speier[3]) 1362, Frankfurt[4]) 1364, Memmingen[5]) 1400, Emmerich[6]) 1445, Bamberg[7]) 1491, Amsterdam[8]) 1503, Leisnig[9]) 1523.

Luther trat ebenso kräftig für den Mädchen- wie für den Knabenunterricht ein[10]) und wünschte zum Lehrpersonal „gelerte vnd züchtige meyster vnd meysterynn“.[11]) Fast in allen Kirchenordnungen[12]) Bugenhagens ist der Mägdleinschulen gedacht.

§ 8. **Winkelschule.** Eine verbotene Schulgattung damaliger Zeit waren die biischolen oder Winkelschulen, d. h. die ohne Privileg errichteten Privatschulen. Wer genug Kenntnisse und Lehrgeschick zu besitzen glaubte, allein kein öffentliches Schulamt erlangen konnte, that auf eigne Faust eine Schule auf. Der Unterricht erstreckte sich so weit als das Wissen des Lehrers. Lesen und Schreiben waren die hauptsächlichsten Gegenstände, doch pfuschten die Winkelschulmeister auch gern ins Latein und Rechnen. Sie boten schon der Frequenz halber alles, was in ihren Kräften stand. Durch alle möglichen Mittel: geringes Schulgeld, grofse Freiheit, lockere Disciplin suchten sie Schüler an sich zu ziehen. Damit zogen sie sich aber auch zugleich Hafs und Feindschaft von seiten der Scholastici[13]) und der privilegierten Rechenmeister zu. Von letzteren wurden sie als „Kalmäufser und Brotdiebe“ arg verfolgt; erstere erwirkten obrigkeitliche

1) Mone, Zeitschrift f. Gesch. des Oberrheins 1851 II, 165.
2) Müller, Schulordnungen S. 8.
3) Mone a. a. O. II, 164.
4) Kriegk, Deutsches Bürgerthum. Neue Folge S. 77.
5) Müller, Schulordnungen S. 269.
6) Müller a. a. O. S. 55.
7) Ebenda S. 108.
8) Ebenda S. 341.
9) Ebenda S. 235.
10) „Also kan eyn meydlin ia so viel zeyt haben / das es des tags eyne stunde zur schule gehe / vnd dennoch seyns gescheffts ym hause wol warte / Verschleffts vnd vertantzet vnd verspielet es doch wol mehr zeyt“; Luther, An die Radherrn S. 19.
11) Luther, An die Radherrn S. 18.
12) Vergl. die Hamburger 1529, pommersche 1563, brandenburgische 1573, Nordhäuser 1583; in Vormbaum I. Bd.
13) Kämmel, die lat. Schulen des 16. u. 17. Jahrh. im Kampfe gegen die Winkelschulen, Zittau 1855.

Verordnungen, wodurch entweder die gänzliche Aufhebung[1]) der Winkelschulen oder Beschränkung ihrer Lehrfreiheit bezüglich der Unterrichtsfächer (nur Lesen und Schreiben) und auch bezüglich des Alters der Schüler (nur solche unter 7 Jahren, und solche über 14 Jahre) verfügt und dem Scholasticus eine Entschädigung für den Schulgeldausfall zugestanden wurde. Wegen der letzten Bestimmung war ihm die Visitation der Beischulen und Einsichtnahme in die daselbst geführten Namenlisten gestattet. Wurde dem Scholasticus die Zahlung des zugestandenen Entschädigungsgeldes verweigert, so stand ihm das Pfandrecht zu.

Am schärfsten ging der Rat zu Amsterdam gegen die onderscholen oder biischolen vor. Die Verordnungen[2]) von 1485, 1487 und 1496 über die Haupt- und Beischulen enthalten die Gesamtheit aller derjenigen Hindernisse, welche zu jener Zeit dem Privat- resp. Winkelschulwesen in den Weg gelegt wurden. Wir geben dieselben auszugsweise wieder: „Schultheifs, Schöffen und Rat gebieten, dafs alle Eltern, welche Knaben unter 14 Jahren haben, die sie zur Schule halten wollen, dieselben in eine von den Hauptschulen setzen sollen; und wofern sie dieselben in eine andre Schule gehen liefsen, dafs sie den Schulmeistern (d. h. den Hauptschulmeistern) das Einkommen davon geben sollen, als ob sie unter ihnen zur Schule gegangen wären, und dafs die vorgenannten Schulmeister darum sollen pfänden können an den Gütern der Eltern vorgenannter Kinder, gleicherweise wie man thun darf mit Schöffenbriefen (1485). — Schultheifs etc. gebieten, dafs niemand innerhalb dieser Stadt Schule halten soll, um Knaben unter 15 Jahren schreiben und lesen zu lehren als die Schulmeister von den grofsen Schulen der Stadt; oder er soll den Schulmeistern von den grofsen Schulen alle Vierteljahr geben zwei Stüber von jedem vorgenannten Knaben ... Wäre es der Fall, dafs die Beischulmeister diese zwei Stüber nicht bezahlen, das wäre bei Verlust von einem Pfunde zum Vorteile des Herrn (des Grafen) und der Stadt ... Die Beischulmeister sollen gehalten sein, den vorgenannten Schulmeistern ihr Verzeichnis und Buch lesen zu lassen, darein sie die Kinder geschrieben haben, und ihre Schule visitieren zu lassen, und sie sollen den Schulmeistern einen Eid thun wegen der Kinder, die sie gelehrt haben, sofern sie das begehren, bei Verlust von einem Pfunde Herrengeldes“ (1487). Ähnlich lauteten die Bestimmungen 1496. — Aus der raschen Aufeinanderfolge dieser Verordnungen läfst sich ein Schlufs auf ihre Wirkungslosigkeit ziehen. Thatsächlich bestanden in Amsterdam die Beischulen trotz der erheblichen

---

1) Vergl. Pommersche Kirchenordnung 1563, kursächs. Kirchenordnung 1580, Nordhäuser Schulordnung 1583, in Vormbaum I. Bd. — Desgl. Müller, Schulordnungen S. 8 und S. 275.

2) Abgedruckt in Müller, Schulordnungen S. 323—327.

Hindernisse ohne Schaden fort, ein starker Beweis, wie wenig der einseitige Lehrplan der lateinischen Schulen den praktischen Bedürfnissen der Amsterdamer Kaufleute genügte.

Die Winkelschulen haben den Stadtschulen nicht allein, sondern dem Erziehungswesen überhaupt geschadet, da sie eine sichere Retirade für diejenigen Schüler wurden, die sich in unverantwortlicher Blindheit ihrer Eltern der geziemenden Anhaltung zu Fleifs und guter Sitte entziehen wollten. Desgleichen liefen die Schulgeldrestanten gern aus einer Schule in die andre. — Trotz aller Verbote bestand das Winkelschulwesen fort auch noch in den nächsten beiden Jahrhunderten. Zu Marburg[1]) wurden bei einer Visitation 1628 fast in allen Gassen Nebenschulen gefunden, manche hatten nur zwei oder drei Schüler. Kassel[2]) hatte 1738 nicht weniger als 34 Nebenschulen. 1784 wurden in Gotha von 11 Winkelschulen 5 verboten.

§ 9. **Hindernisse des Schulwesens.** Die Erfolge entsprachen bei weitem nicht den Anstrengungen, welche um die Hebung des Schulwesens im 16. Jahrhundert gemacht wurden. Die Volksschule kam auf Dörfern fast nirgends zustande. Wenn der Küster lesen und schreiben konnte und Lust zum Unterrichten hatte, und wenn die Bauern gewillt waren, ihre Kinder zu schicken und Schulgeld zu zahlen, so wurde von Martini bis Fastnacht Schule gehalten; im Sommer brauchte man die Kinder zur Feldarbeit.

Der Grund zur Erfolglosigkeit der Bemühungen lag darin, dafs die drei wichtigsten Vorbedingungen eines geordneten Schulwesens fehlten, nämlich Lehrerbildungsanstalten, der Schulzwang und ausreichende Besoldung der Lehrer.

Dafs Unterrichten eine Kunst sei, wufste man damals noch nicht, der Besitz der Kenntnisse allein genügte zur Übernahme eines Lehramts.

Bezüglich des Schulbesuchs gab es zwar Verfügungen, widerstrebende Eltern zu bestrafen; doch wäre die Bestrafung bei der grofsen Armut des Volks eine grausame Härte für viele gewesen. Und so blieben die obrigkeitlichen Anordnungen meist fromme Wünsche.

Die damaligen Besoldungsverhältnisse der Lehrer bieten kein erfreuliches Bild. Einen grofsen Teil ihres Einkommens bezogen sie in Naturalien: Holz, Kerzen, Korn, Brot, Wein, Eier, Hühner. Dazu kam, dafs dieselben den Leuten gewöhnlich abgezankt werden mufsten. — Überdies beschwerte der Gutsherr (Schulpatron) den Schulmeister nicht selten mit Hof- und Jagd-, und der Pfarrer ihn mit Frondiensten, als Glockenläuten,

1) Heppe, Gesch. des Volksschulw. I, 302.
2) Ebenda S. 313.

Kirchefegen, Manteltragen etc. — Im Lehrstande findet man auch den Verhältnissen entsprechend halbverkommene Elemente aller Stände: abgedankte Soldaten, entlaufene Diener, verdorbene Gymnasiasten, verpfuschte Studenten.

## § 10. Arithmetische Leistungen der lat. Schulen u. Universitäten.

Wir haben bereits § 1 bemerkt, in den vorreformatorischen Kloster- und Domschulen habe sich der Unterricht auf die Erlernung einiger Sprachkenntnisse und die Einübung der kirchlichen Gesänge beschränkt, was man zur Ausbildung eines künftigen Kirchendieners für genügend hielt. Die mathematischen Wissenschaften waren hier so gut wie ausgeschlossen.

Bezüglich der Förderung des mathematischen Unterrichts auf den lateinischen Schulen müssen namentlich die Bemühungen Melanchthons rühmend erwähnt werden. Er las selbst mathematische Kollegien und versah mathematische Kompendien andrer mit Vorreden[1]), in denen er die Mathematik als eine der Astronomie und Physik unentbehrliche Hilfswissenschaft nennt und den formalen und ethischen Nutzen ihres Studiums hervorhebt.

Die mathematischen Leistungen waren in jener Zeit auf den lateinischen Schulen sehr minimale. Die meiste Zeit absorbierte der lateinische Unterricht, für die Mathematik war meist nur in den beiden obersten (oder auch nur in einer) Klassen wöchentlich eine Stunde angesetzt. Dafs infolgedessen die mathematischen Leistungen zu den sprachlichen in argem Mifsverhältnis[2]) stehen mufsten, ist ganz natürlich; in einer Klasse, in der man Terenz und Cicero las, die Syntax beendete und Prosodie begann, lernte man die vier Species in ganzen Zahlen. Weiter als bis zur Bruchlehre und Regeldetri kam man selten.

Die Lehrpläne des 16. Jahrhunderts stellen denn auch gar keine oder nur geringe Anforderungen bezüglich der Mathematik. Wir lassen hier die in einigen Schulordnungen auf die Arithmetik bezüglichen Bestimmungen folgen.

„Der[3]) Sechser übung: Die Zyphern vnd zal. Die übung der fünfer: Gemeyner rechnung. Der vierer übung (steht nichts da). Vbung der dreyer: Musik / Arithmetik / vnd Astromei.“ (Für die beiden obersten

1) Peurbach, Elementa Arithmetices, Wittenberg 1536. — Stifel, Arithmetica integra, Norimbergae 1544.

2) „Daselbst [in der obersten Klasse] soll man Prosodiam lehren und sie ernstlich dahin halten, dafs sie Versus schreiben. Es ist auch nötig, dafs die Knaben gelehrt werden Elementa Arithmetices; denn die Species in Arithmetica und Regulamdetri können die Knaben leichtlich lernen, wenn es ihnen apte et breviter proponiert wird“; aus dem Lehrplane für Partikularschulen der pommerschen Kirchenordnung 1563, siehe in Vormbaum I, 174.

3) Aus der Zwickauer Schulordnung für die sechsklassige Lateinschule 1523, abgedruckt in Müller, Schulordnungen.

Klassen steht nichts da.) — „Auf[1]) den Freitag soll von 12—1 Uhr die Arithmetica gelesen werden. Es sollen aber die Praeceptores keine andre Arithmeticam dann Piscatoris brauchen und daraus in quarta Classe (= die zweitoberste, wo Terenz und Cicero gelesen wurde) alleine die species, in quinta (oberste Klasse) aber die ganze Arithmeticam lesen." Aus den zur Einführung genannten Kompendien[2]) läfst sich ein genaues Bild über den Umfang des vorgetragenen Stoffes gewinnen. Die praktischen Teile der Arithmetik, d. h. kaufmännisches Rechnen, enthalten die auf lateinischen Schulen gebrauchten Lehrbücher nicht; um jene zu erlernen, waren die Schüler auf Privatunterricht oder auf den Besuch einer Rechenschule angewiesen.

Nicht viel höher als auf den lateinischen Schulen waren die arithmetischen Leistungen auf den Universitäten. Von Grammateus[3]) erfahren wir, dafs der Algorithmus M. Georgii Peurbachii[4]), der etwa dasjenige arithmetische Mafs von Wissen enthält, welches gegenwärtig zehnjährige Kinder besitzen, „gemacht sei für die Studenten der hohen schul zu Wien". Über den Inhalt mathematischer Belehrung auf der Universität Wittenberg zu Melanchthons Zeiten giebt uns die Einladungsrede eines Docenten der Mathematik Nachricht. Dieser Docent lobt die Arithmetik und bittet die Studenten, sich nicht durch die Schwierigkeit dieser Disciplin zurückschrecken zu lassen. Die ersten Elemente seien leicht, die Lehre von der Multiplikation und Division verlange etwas mehr Fleifs, doch könne sie von Aufmerksamen ohne Mühe begriffen werden. Freilich gebe es schwierigere Teile der Arithmetik; „ich spreche aber", fährt er fort, „von diesen Anfängen, die Euch gelehrt werden und nützlich sind."[5])

Man darf sich jedoch nicht allzusehr wundern ob der mäfsigen mathematischen Anforderungen und Leistungen; denn am Anfange des 16. Jahrhunderts stand die Mathematik noch auf einer tiefen Entwickelungsstufe, kannte man doch noch nicht die Auflösung kubischer Gleichungen und

1) Aus dem Lehrplane der fünfklassigen Partikularschulen in Kursachsen; siehe kursächsische Kirchenordn. 1580 in Vormbaum 1, 243.

2) In Altdorf war eingeführt: Gemma-Frisius, Arithmeticae practicae Methodus facilis 1540. „Der Mathematicus soll die Arithmeticam, so gut er die in lateinischer Sprach bekommen kann, ausdrücklich und verstendlich lesen und explicieren. Vnd solches fürnehmlich aufs dem libello Gemmae Frisii"; Altdorfer Gymnasialordnung 1575; Vormbaum I, 612. — In Kursachsen war Joh. Fischers lat. Compendium vorgeschrieben: „Joh. Piscatoris Arithmeticae Compendium, pro Studiosis hujus artis tyronibus recognitum, Lips. 1549" und später.

3) Grammateus, „Ein new künstl. behend vnd gewifs Rechenbuchlin" . . . Wien 1518 Bl. 5.

4) Georg Peurbach 1423—1461 in Wien.

5) Raumer, Gesch. d. Päd. I, 288.

der praktischen Arithmetik fehlten beispielsweise noch die Decimalbrüche, und die gegenwärtige Divisionsmethode, der Logarithmen gar nicht zu gedenken.

Wir wenden uns nun zu derjenigen Schulgattung, welche in jenem Zeitalter als die eigentlichste und ausschliefslichste Pflanzstätte der praktischen Arithmetik zu gelten hat.

§ 11. **Rechenschule.** Die Gründung der Rechenschulen begann mit dem Aufblühen des Handels im 13. Jahrhundert. Der Hansabund 1241 beweist, dafs auch der dritte Stand sich erhoben hatte zu einer Macht, stark genug, die eigenen Interessen selbst zu vertreten. Da die vom Klerus unterhaltenen Schulen dem Handelsstande nicht diejenige Bildung gewährten, welche er brauchte, nämlich aufser Lesen und Schreiben auch Buchhaltung und vorzüglich Rechnen, so mufste der Kaufherr anfangs selbst der Lehrmeister seiner Lehrlinge und Söhne in den kaufmännischen Wissenschaften sein, bis ihn die Rechenmeister in dieser Thätigkeit ablösten. Des hinreichenden Auskommens wegen erhielt gewöhnlich ein (oder einige) Rechenmeister das Unterrichtsmonopol für eine Stadt, sein Titel war dann privilegierter städtischer Rechenmeister. Nicht selten war ein solcher Rechenmeister gleichzeitig in der städtischen Verwaltung thätig, er führte die Stadtrechnungen, visierte die eingehenden Fässer, funktionierte im Münzwesen etc. Stadtschreiber war der Titel dieses vielseitigen Beamten. Ein tüchtiger Rechner war damals ein gesuchter Artikel.[1])

Bei der Bestallung wurde dem Rechenmeister eine Urkunde, seine Pflichten und Rechte enthaltend, von dem Magistrate ausgefertigt. Die Urkunde, welche 1627 zu Rostock einem aus Wittenberg dahin berufenen Rechenmeister ausgestellt wurde, hat folgenden Wortlaut. „Wir Bürgermeister und Rat zu Rostock urkunden hiermit, dafs wir den ehrenfesten und wohlgelahrten Jeremias Bernstertz zu unserm und gemeiner Stadt Schreib- und Rechenmeister, bis ein Teil dem andern diese Bestallung ein halbes Jahr zuvor gebürlich aufkündigen wird, bestellt und angenommen haben, bestellen ihn auch in Kraft dieses Briefes dergestalt, dafs er wöchentlich des Montags, Dienstags, Donnerstags und Freitags eine Stunde in der lateinichen Schule allhier aufwarten, die junge Jugend daselbst ohne Unterschied umsonst, andere aber aufserhalb der Schule wöchentlich alle Tage, es seien Knaben, Mädchen und andere, so es von ihm begehren, für billiges und leidliches Monats- und Wochengeld im lateinischen und deutsch Schreiben, Rechnen, Buchhalten und anderen nützlichen Künsten und guten Sitten fleifsig lehren und sonst alles andere, so einem fleifsigen und getreuen Schreib- und Rechenmeister eignen und gebüren will, nach

1) Vormbaum I, 165.

seinem besten Verstande und Vermögen mit höchstem Fleifse verrichten solle. Damit ihm aber auch seine getreuen Dienste gebürlich belohnt werden mögen, als haben wir ihm jährlich zu seiner Besoldung 400 Mark sündisch aus dem gemeinen Kasten zu den gewöhnlichen 4 Quartalen, und dann auch frei an Schofs, Wacht, Accise, Grabengehen, hundertsten Pfennig, Soldatengeld und aller andern Kontribution, wie die Namen haben möge, so vor oder nach aufkommen, wie dann auch freie Bürgerschaft, freien Ab- und Zuzug, endlich auch eine freie Wohnung versprochen: Alles getreulich und ohne Gefährde." [1])

In gröfseren Handelsstädten vereinigten sich die Rechenmeister zu Innungen mit ähnlichen Satzungen und Gebräuchen wie die Handwerkerzünfte. Der Lehrling, Junge genannt, wurde mittels Kontrakts von einem Innungsmeister aufgenommen; nach beendigter Lehrzeit, welche sechs Jahre dauerte, wurde er losgesprochen und konnte nun unter dem Titel „Schreiber" von einem Schulmeister oder einer Schulmeisterswitwe als Gehilfe sich engagieren lassen. War ein „locus" offen, d. h. eine Stelle vakant, so rückte der älteste Anwärter ein, d. h. er wurde Meister, mufste sich aber vorher einem Examen vor den Vorgehern der Innung unterwerfen, dann seine Tafel (Aushängeschild) schreiben und den Innungsmeistern zur Schau stellen und schliefslich die Statuten der Innung unterschreiben.

Wir wollen zunächst im folgenden einen Kontrakt, die arithmetischen Examenfragen und ein Zeugnis über eine bestandene Prüfung mitteilen.

Ein Lehrkontrakt.

„Im Namen der heiligen Dreieinigkeit.

Kund und zu wifsen sei hiermit Allen, so daran gelegen, dafs heute auf untengesetztem Dato zwischen Herrn J. F. Bruchmann, Schreib- und Rechnenmeister dieser Stadt an einem, und Herrn P. H. Schliemann am andern Theil folgender Lehr- und Dienstcontract verabredet und geschlossen worden:

1. Es gibt Herr P. H. Schl. seinen Sohn H. H. Schl. auf sieben nacheinanderfolgende Jahre, als von Ostern 1801 bis Ostern 1808 wolbedächtlich bei dem Hrn. J. F. B. in die Lehre, um von ihm die löbliche Schreib- und Rechnenkunst wie auch das italienische Buchhalten zu erlernen und bezalt dafür einhundert Mark Lübisch Courant, nemlich 50 Mark bei Unterschreibung des Contracts und 50 Mark nach Verlauf der Hälfte der Dienstjahre. Hierbei verpflichtet sich

2. der Hr. H. P. Schl. seinen Sohn in währender Dienstzeit mit

---

1) Heppe, Gesch. des Volksschulwesens V, 394.

Kleidern, Bett und reiner Wäsche hinlänglich zu versorgen, für seine Treue Bürge zu sein und ihn anzuhalten, dafs er sich jederzeit fromm aufführe, seine Herrschaft gebührend respektire, ihren Befehlen und denen, durch die sie befehlen, gehorsam folge, ohne ihr Vorwissen sich weder bei Tag oder Nacht aus ihrem Hause finden lassen, ihren Nutzen und Bestes allezeit beobachten und nach allem Vermögen befördern helfe, keine zur Verführung Gelegenheit gebende Örter besuche und besonders die Schulkinder und Kostgänger ohne Unterschied, ohne Gunst und Gaben zu aller Freundlichkeit fleifsig und unverdrossen unterweise, mit Niemand sich gemein und dreist mache, sich auf keine Weise von seinem Herrn abwendig machen lasse, und überhaupt sittsam, redlich, getreu, verschwiegen und willig sein soll, welches auch H. H. Schl. hiermit feierlich angelobt. Sollte es sich aber zutragen, (welches Gott verhüten wolle), dafs der Bursche sich von bösen Leuten verführen liefse, obigen Punkten zuwider zu handeln, oder von seinem Herrn heimlich oder öffentlich wegzugehen, so verpflichtet sich Hr. H. P. Schl., wenn er solches nicht hindert oder stört, 300 Mark Courant an das S. Annen Armen- und Werkhaus zu bezalen und der ausbezalten Gelder verlustig zu sein. Hiegegen verpflichtet sich

3. Hr. J. F. Br. erwähnten H. H. Schl. während dar 7 Lehrjahre an seinem Tische ordentlich zu versorgen, (wenn er nicht durch eine unbescheidene Aufführung die Zurückweisung von demselben sich selbst zuzieht), ihn zu allem Guten anzuhalten und im Schreiben, Rechnen und Buchhalten so zu unterrichten, dafs er bei Anwendung seines Fleifses sowol bei der Schule als auch am Comptoir damit bestehen kann, wozu ihm sein nunmehriger Principal dem hoffentlich guten Verhalten gemäfs, durch hinlängliche Empfehlung selbst beförderlich zu sein sich hiermit erbietet.

4. Nach Verlauf dieser Lehrjahre wird ihm sein Herr entweder als einen Gesellen gegen gewöhnliches Salair (10 Thlr jährlich) selbst behalten oder auch anderswo empfehlen. Dagegen mufs er, wenn seine Gesinnungen wären, sich weiter etwas zu versuchen, es seinem Herrn ein Vierteljahr vorher ankündigen, welches der Herr auch zu thun schuldig ist.

5. Sollte es aber Gott gefallen, seinen Herrn während der Dienstzeit aus der Welt zu nehmen, so sollen dessen Erben, falls sie die Schule fortsetzen, ihn entweder selbst behalten oder im Gegentheil Sorge tragen, ihn bei einer andern Schule unter zu bringen, damit er völlig auslerne, wogegen aber gedachten Erben das noch restirende Lehrgeld ausbezalt wird. Zu mehrerer Versicherung sind hiervon 2 gleichlautende Exemplare ausgefertigt und von beiden Theilen ohne Arglist und Gefährde mit dem Vorsatz diesen Contract fest und unverbrüchlich gegen alle zu machenden

Ausflüchte zu halten, eigenhändig unterschrieben, wovon jeder eins zu sich genommen.[1])

So geschehen Lübeck d. 11. April 1801.

Jos. Fr. Bruchmann."

Das Examen, welches beispielsweise in Nürnberg zu bestehen war, war ein schriftliches und ein mündliches; es bezog sich auf die Schreib- und Rechenkunst. Der Examinand erhielt vom ältesten Vorgeher der Innung bezüglich des Rechnens folgende Fragen zur häuslichen schriftlichen Beantwortung:

„1. Was ist Arithmetica und was lehrt sie?
2. Wie viele Zahlzeichen werden dazu gebraucht? Was haben sie für ein figürliches Ansehen? Und wie werden sie ausgesprochen?
3. Was ist eine Zahl? Wozu wird das 1 angenommen und was für Eigenschaft hat das Null?
4. Wie werden die Zahlen eingetheilt und unterschieden? und wieviel Unterschied hat jeder Teil?
5. Was sind die fürnehmsten Eigenschaften der Zahlen? und wie werden sie zum Gebrauch gezogen?
6. Wieviel sind Species Arithmeticae? Was lehret jede? und wie werden sie probirt?
7. Was sind gebrochene Zahlen? Ists auch nützlich, darin zu laboriren und sowohl die Jugend als andere in solchen zu informiren?
8. Wie vielerlei Arten sind die Brüche oder gebrochenen Zahlen?
9. Wie kann man einen Bruch durch eine Mensur in seine kleinste Form bringen?
10. Wie werden die Brüche ungleiches Namens zu gleichen Nennern oder gleichnamig gemacht? und wie kann man unter 2, 3 und 4 und mehr Brüchen erkennen, welcher unter ihnen dem Wert nach der gröfseste sei?
11. Wie werden die Brüche nach ihrem Wert resolvirt? und der Wert oder Geltung des Bruches wieder zu einem Teil des Ganzen gemacht?
12. Wie werden die Brüche nach den Speciebus auf das Vortheilhafteste behandelt?
13. Wozu werden die Species Arithmeticae sowohl in gemeinen Ganzen, als auch gebrochenen Zahlen applizirt?
14. Was ist und lehret Regula de Tri? Was hat sie für eine Ordnung und wie wird damit procedirt?
15. Müssen in der Regula de Tri alleweg drei Dinge bekannt seyn?

1) Heppe, Gesch. des Volksschulwesens V, 310.

16. Mufs die Fragzahl jederzeit hinten zur rechten Hand stehen? und die vördere der hinteren Zahl dem Namen nach gleich seyn?
17. Warum multiplicirt man die hintere und mittlere Zahl mit einander und dividirt das Produkt durch die erstere oder vördere Zahl? Woher hat dieser Prozefs seinen Grund und Demonstration?
18. Kann einer bei diesem bishero angeführten arithmetischen Wissen für einen Rechnenmeister passiren und erkannt werden? oder wird eine mehrere Wissenschaft von einem Arithmetico erfordert?
19. Was ist Progressio? und wie vielerlei sind Progressiones?
20. Wie werden die arithmetischen und geometrischen Progressiones gegen einander unterschieden und erkannt? auch ihre Progressional-Zahlen vortheilhaftig in eine Summam gebracht?
21. Was ist Progressio Harmonica und deren Eigenschaft? Wie wird sie erkannt und gefunden?
22. Was sind Partes aliquotae? und wie werden sie gefunden?
23. Was sind Perfect-, Excess- und Defect-Zahlen? und wie werden sie von einander erkannt und gefunden?
24. Was ist Algebra oder Coss? und was für Signa oder Zahlen werden dazu gebraucht?
25. Was sind Radices? Quadrat- und Kubikzahlen? und wie werden sie generirt und formiret?
26. Wie extrahirt man radicem quadratam oder cubicam? und wozu dient solche Extraction?
27. Was sind Pronic-Zahlen? Wie werden sie gefunden und ihre Wurzel extrahirt? [S. unten § 71.]
28. Weil in Cossischer Operation vielfältigmal solche Quantitates oder Potestates vorkommen, welche durch die Signa + und ÷ connectirt und in dem Algorithmo der Cossischen Specierum behandelt werden müssen, so fragt sich's: Was ist in jeder Species dabei zu obseruiren?
29. Was sind Rational-, Irrational- oder Surdische Zahlen? auch Communicantes? und wie wird mit denenselben in denen Speciebus procedirt?
30. Was sind Binomina und Residua? und wie werden sie in den Speciebus applicirt?
31. Kann man aus Binomiis und Residuis Radicem quadratam et cubicam extrahiren?
32. Was sind Universal-Zahlen? und wie wird in denen Speciebus mit ihnen procedirt?
33. Was seynd Polygonal-Zahlen? und was ist dabei zu obseruiren?
34. Was ist die Diff. einer Chilioheptacosioheptacontatetragonal-Zahl?

Wie wird solche generiret und vom primo termino an bis auf den Sechsten extendiret?

35. Wie wird besagte Chilioheptacosioheptacontatetragonal-Zahl, deren Latus 6 formirt und aus solcher gefundenen Polygonal-Zahl die Wurzel wieder extrahirt?"[1])

Ein Prüfungszeugnis:

„Wir die Vier hernachbenandte mit Namen August Wildsaw, Johann Heer, Sebaldt Winckler vnnd Sebastianus Curtius Rechenmaistern Alfs von Einem Edlen, Ehrnvesten, Hoch- vnd Wolweisen Rath der Statt Nürnberg vnserer HochverEhrten lieben Obrigkeit verordnete Inspectores, Visitatores vnnd Examinatores über die Teutschen Schreib- vnnd Rechen-Schulen dieser Statt, Uhrkunden vnnd Bekennen hiemit gegen Jeder mennigklich in Krafft dieser Schrifft: Dafs Fürweiser derselben, der Ersam Joachim Schram, auch Mitburger, aufs ob HochEhrngedachts Eines Edlen, Ehrnvesten Raths, vnnd deroselben Wolverordneten Beyden Herrn Scholarchen über die Teutschen Schulen, Dern auch Edlen, Ehrnvesten, Fürsichtigen vnnd Wolweisen Herrn Georg Pfinzing, vnnd Herrn Georg Christoff Volckamers Grofsgunstiges anbefehlen, den 29. Aprilis dieses Instehenden 1620 Jahrs vor vnns im Examine erschinen, vnnd vnsrer habenden Pflicht nach, mit Fleifs Examiniret worden ist. Alda wird dann seine Person vnnd qualitet also qualificirt befunden, Dafs wir darauff in unsrer gethanen Relation bey unserm Gewissen aufsgesagt, Dafs Er zu einen Schul- vnd Rechenmeister wol zuzulassen, auch die liebe Jugendt in Gottesforcht, Lesen, Schreiben, Rechnen, Visiren vnnd andern hierzugehörigen Künsten zu Instituiren vnnd zu vnterweisen wohlgeschickt seye. Weiln Er sich auch sonsten, vonn Jugendt auf, vnnd sonderlich in seinen Ehrlich ausgestanden Sechs Dienst Jahrn dessen Ihme dann sein Herr vor vnnfs guts Zeugnus geben. Jeder Zeit fromb, Gottesförchtig, Getreu, verschwiegen, vnnd also wie Einem Ehrlichen Menschen gebürt, vnnd wohl anstehet, Erwisen vnd verhalten hat. Darauf Ihme dann von der Lieben Obrigkeit Albie eine Teutsche Schul anzufangen vnnd zu halten, Grofsgunstig erlaubt vnnd zugelassen worden. Dieweil Er aber seine Wohlfahrt ausserhalb dieser Statt, an andern Orten zu suchen verhofft vnnd gemeint. Vnns derowegen vmb einen Schein vnd Zeugnus, Obangedeuten Verlauffs, solchen seiner Notturfft nach, haben zu gebrauchen, Dienstlich ersucht vnnd gebetten. Haben wir Ihme solchen der Wahrheit zu Steuer nicht abschlagen oder verweigern können noch söllen. Sondern Ihme diesen vnder vnserer aigenen Handt Subscription vnnd fürgedrückten Pettschafften wissentlich zugestellt. Der geben ist den 12. Julii Im Jahr der Gnadenreichen Ge-

1) Schultheifs, Gesch. d. Schulen in Nürnberg II, 109 ff.

burt vnsers Lieben Herrn vnnd Heilandt Jesu Christi, Ein tausend Sechs hundert vnnd zwanzig.

(L. S.) August Wildsaw, Rechenmeister, Inspector vnd Visitator.
(L. S.) Johann Heer, Arit. Insp. vnnd Visitator in Nürnberg.
(L. S.) Sebaldus Winckler, Arithmetic. etc. Insp. Sc. Scholarum propria manu.
(L. S.) Sebast. Curtius, Arithm. et G. Inspect. vnnd Visitator."[1]

Ehrbar, wohlgelehrt und kunstberühmt waren die Prädikate[2] der zünftigen Rechenmeister.

Die Lübecker Schreib- und Rechenmeisterinnung[3] bestand bis 1813. Nürnberg, welche Stadt durch den Kunstfleifs ihrer Bürger alle Städte Deutschlands überstrahlte[4], hatte auch die berühmtesten Rechenschulen. Schultheifs[5] nennt eine grofse Anzahl Nürnberger Rechenmeister, unter denen die bedeutendsten sind: Johann Heer[6], welcher ein Kompendium[7] schrieb zur Vorbereitung auf das Rechenmeisterexamen; Zacharias Lochner[8] († 1608), welcher in der Herstellung magischer Quadrate bedeutende Fertigkeit besafs; Sebastian Kurtz (= Curtius 1576—1659), dessen Rechenschule einen weit über die Grenzen des Nürnberger Weichbildes gebenden Ruf genofs und dem der Kaiser Ferdinand III. 1654 durch Verleihung einer goldenen Kette[9] als Geschenk für die Überreichung eines geodätischen Werkes seine Gunst bewies. — Ein Nürnberger Rechenmeister, Ulrich Wagner, ist der Verfasser des ältesten deutschen Rechenbuchs 1482.

Die Zahl der Rechenschulen wurde 1613 in Nürnberg auf 48 festgesetzt und 1665 auf 28 reduciert. Die Zunftverfassung 1665 bestand aus 9 Artikeln (betreffend die Anzahl der Schulen, Lehrzeit, Gehilfenzeit, Neuwahl der Vorsteher, Innungsbeiträge, Rechnungsablegung, Schulzeit), welche Schultheifs mitteilt.[10] In dessen Werke findet man auch Nachrichten über die Amtsverwaltung[11] der Innungsvorgeher, beispielsweise wie diese einen nichtzünftigen Schulmeister an der Ausübung des Lehr-

1) Schultheifs II, 95.
2) Ebenda S. 34.
3) Heppe, Volksschulwesen V, 308.
4) Vergl. Doppelmayr, Historische Nachricht von den Nürnbergischen Mathematicis und Künstlern 1730.
5) Schultheifs II.
6) Schultheifs II, 26 und Doppelmayr S. 166.
7) Arithmeticae et geometricae Questiones für diejenige, so sich ins Examen und folgends zu dem teutschen Schulstand zu begeben gesinnt, Nürnberg 1616.
8) Doppelmayr, Hist. Nachricht.
9) Schultheifs II, 27.
10) Ebenda S. 105.
11) Ebenda S. 98 ff.

amts hindern wollten und wie es dabei sogar zu Thätlichkeiten (Haarraufen, Maulschellen) kam.

So wohlthätig die Zunftverfassung der Rechenmeister im 16. Jahrhundert auch war, so hat sie doch in der Folgezeit die Entwickelung des Nürnberger Schulwesens stark gehindert. Weil den Innungsmeistern das Zwangsrecht für ihre Schulen zustand, so waren sie wenigstens aus Konkurrenzrücksichten nicht genötigt, den Forderungen und Fortschritten auf pädagogischem Gebiete zu folgen. Durch unverändertes Festhalten an ihren Satzungen kam es dahin, dafs sie sich überlebten. Im Jahre 1808 wurden die Vorsteher zur Wahrung ihres alten Rechts sogar vorstellig[1]) gegen einen königlichen Erlafs, der auf Organisation von Volksschulen abzielte. Der letzte Nürnberger Rechenmeister, Zacharias Schmidt, amtierte bis 1821. Neben Nürnberg hatten auch Augsburg und Ulm berühmte Rechenschulen. Die Ulmer wurde 1545 von dem in Wittenberg unter Stifel gebildeten C. Marchtaler gegründet und behielt lange Zeit in der Vertretung und Entwickelung der Stifelschen Ideen ihre Eigentümlichkeit. Johann Krafft, ein Hauptvertreter der welschen Praktik im 16. Jahrhundert, war ebenfalls ein Ulmer. Zu ganz besonderem Ruhme gelangte Ulm[2]) im 17. Jahrhundert durch das Geschlecht der Faulhaber[3]), sodafs man im deutschen Reiche rühmte: Ulmenses sunt mathematici.

In Nürnberg und Ulm erkennt man zwei Centren für die Ausbreitung mathematischer Wissenschaften im 16. Jahrhundert, das historisch erste in Deutschland ist Wien. Den Ruhm dieser Stadt begründete der Astronom Georg Peurbach (1423—1461), dessen Elementa Arithmetices zwar nicht bei seinen Lebzeiten, wohl aber im folgenden Jahrhundert gedruckt wurden. Grammateus, welcher zuerst über Buchhaltung in deutscher Sprache schrieb, und Christoff Rudolff, dem wir die erste deutsche Algebra verdanken, sind in Wien gebildet.

§ 12. **Unterricht durch Briefe und Geheimhaltung von Kenntnissen.** Eine damals übliche eigentümliche Art der Ausbreitung der mathematischen Wissenschaft war die Sitte hervorragender Gelehrten, sich in Briefen gegenseitig Aufgaben zu stellen.

Auch gab es umherziehende Rechenkünstler, welche die Lösung seltsamer und amüsanter Aufgaben wie Kunststückchen für Geld zeigten. Hans Conrad, ein Freund des Adam Riese, hat sich einmal von dem Mönche Aquinas und ein andres Mal vom Magister Alexander die Auflösung eines Exempels aus der Coss um 1 Goldgulden weisen lassen.[4]) Dieses Beispiel

1) Schultheifs II, 53—55.
2) Ofterdinger, Beiträge zur Gesch. der Math. in Ulm, 1867.
3) Ofterdinger a. a. O. und Allgemeine deutsche Biographie VI.
4) Berlet, Die Coss von Adam Riese S. 6.

ist zugleich ein Beleg für die Geheimhaltung von Kenntnissen, was in jenen Zeiten gar nichts Seltenes war und in direktem Gegensatze zu der heutigen Sitte steht. Bei den Gelehrten mochte meist gelehrte Eitelkeit den Grund hierzu bilden; wir erinnern beispielsweise nur an die Geheimhaltung der Auflösung kubischer Gleichungen, wobei die Namen Scipione del Ferreo, Antonio del Fiore, Tartaglia und Cardanus eine Rolle spielen. Bei den niederen Schulmännern mochte der Grund zur Geheimhaltung ihrer Kenntnisse beziehentlich Geheimnisthuerei mit denselben wohl nur materieller Art sein. Sie suchten ihre Gelehrsamkeit finanziell so sehr als möglich auszubeuten, was durch mündlichen Unterricht weit ergiebiger war als durch den Druck. Joann Gotlieb[1]), ein Nürnberger Bürger, giebt eine höchst abfällige Kritik über die verkehrte Lehrmethode der Buchhaltung, „so in rechen- und schreybschulen gelehrt wird“; der Grund sei das Ungeschick der Lehrer; er bringe jedem das Buchhalten in 14 Tagen bis 4 Wochen aus dem Grunde bei, man solle nur zu ihm kommen. — Marchtaler[2]) schrieb an den Bürgermeister zu Ulm, er wolle eine Rechenschul anrichten, „dergleichen weder in Nürnberg, Augspurg oder Ulm sein soll, denn ich hab gott lob jetz den Vorteil, den nicht alle Rechenmeister haben.“ — Auch die Büchertitelzusätze: „desgleichen fürmalſs weder in Teutzscher noch in Welscher sprach nie gedruckt ...“[3]), oder „zuvor der weis nie ausgangen“[4]) etc. stehen in gewisser Beziehung zur Geheimhaltung von Kenntnissen.

Müller[5]) hat bezüglich des Lese- und Schreibunterrichts ähnliche Bemerkungen über Geheimhaltung von Geschicklichkeiten gemacht. Ickelsamer klagt: „Wie man die buchstaben recht nennen soll / wissen nicht viel / die es aber wissen / die sind so gerne alleine gelert / vnd behaltens nur in jren schulen vnd köpffen.“

Treutlein[6]) hat Aussprüche von Christoff Rudolff, Adam Riese und Michael Stifel gesammelt, welche die Geheimhaltung der Algebra in jenen Zeiten darthun.

---

1) Er schrieb „Ein Teutsch verstendig Buchhalten“ 1531 (Ex. in Leipzig Universitätsbibl.).

2) Ofterdinger, Beitr. zur Gesch. der Math. in Ulm.

3) Apians Rechenbuch 1527.

4) Joh. Obers, Rechenbüchlein 1545.

5) Müller, Quellenschriften S. 347.

6) Treutlein, „Die deutsche Coss“ in Abhandlungen zur Gesch. d. Math. II, 11.

## Zweites Kapitel.

### Die arithmetischen Schriftsteller und ihre Schriften.

§ 13. **Georg von Peurbach**[1]) ist der Bahnbrecher für die Aufnahme der mathematischen Studien in Deutschland seit dem Wiederaufleben des klassischen Altertums. Er war 1423 in Oberösterreich geboren, genofs (nicht unter Joh. Gmünden) seine Ausbildung in Wien, unternahm darnach eine Bildungsreise nach Italien und wurde Magister der Astronomie zu Wien. Vom Kardinal Bessarion, der als Nuntius am Wiener Hofe weilte, lernte er Griechisch, um den Ptolemäus in der Ursprache zu lesen. 1461 starb er unvermutet. Wesentliche Verdienste erwarb er sich um die Astronomie; er strebte die Herstellung einer korrekten Übersetzung des Ptolemäus an, verbesserte einige astronomische Instrumente und fing an, die Sexagesimalbrüche aus den astronomischen Rechnungen zu verdrängen. Seine zahlreichen Werke sind meist Manuskript geblieben, nur einige wurden nach seinem Tode gedruckt, darunter auch das Werkchen, um deswillen er hier genannt wird: Elementa Arithmetices . . . Wittenberg 1536 (Oktav, 54 Blätter, ohne Seitenzahlen). Es enthält Numeration, Addition, Subtraktion, Mediation, Duplation, Multiplikation, Division, Progressionen, Extraktion der Quadrat- und Kubikwurzel, Regula falsi und Proportionen. Man findet durchgängig nur Beschreibungen des Verfahrens; Definitionen und Begründungen fehlen, für die Species in ganzen Zahlen und die Kubikwurzelausziehung sogar die Beispiele; sonst ist jede Operation nur durch ein Beispiel illustriert. Nach dem Zeugnisse des Grammateus war dieses Werkchen „für die Studenten der hohen schul gemacht".[2]) Aus diesem Zeugnisse und dem Inhalte des Buches geht hervor, dafs um jene Zeit die indische Positionsarithmetik in weiteren Kreisen noch unbekannt war. — Wildermuth nennt[3]) einen aus sieben Quartblättern bestehenden Algorithmus Peurbachs, welcher 1505 gedruckt ist.

§ 14. **Regiomontanus**[4]), auch Joannis de Monteregio, eigentlich Johann Müller, geboren 1436 zu Unfied bei Königsberg in Franken, studierte in Leipzig und Wien (hier unter Peurbach) und unternahm dann eine Bildungsreise nach Italien. Nach Beendigung derselben war er thätig in Wien, Raab und Nürnberg, wo ihm der sehr begüterte Bernhard Walther, ein Liebhaber der Astronomie, eine eigene Druckerei unterhielt. 1474 gab

1) Doppelmayr. — Poggendorff. — Gerhardt, Gesch. der Math.

2) Grammateus, Rechenbüchlein 1518 Bl. 5.

3) Schmidt, Encyklopädie VI, 731.

4) Doppelmayr. — Poggendorff. — Ziegler, Regiomantanus, ein geist. Vorläufer des Columbus 1874. — Chasles, Gesch. der Geom. 1839 übersetzt von Sohncke S. 622.

Regiomontan auf 32 Jahre (1474—1506) berechnete Ephemeriden heraus; diese Leistung veranlafste den Papst Sixtus IV., den Verfasser 1475 zur Kalenderreform nach Rom zu berufen. Schon 1476 starb Regiomontan in Rom zur Zeit einer Pest, ob an der Pest oder durch Gift seiner Feinde, ist nicht entschieden. — Die grofsen Verdienste[1]) dieses Mannes zu würdigen, fällt aufserhalb des Rahmens dieser Arbeit. Wir nennen ihn hier, weil er Anteil hat an der Erfindung der Decimalbrüche (siehe daselbst) und weil er lange Zeit für den Verfasser eines (nur von ihm verbesserten) Werkes gehalten wurde, welches Joh. Schöner (ein Nürnberger Mathematiker 1477—1547) edierte unter dem Titel: Algorithmus demonstratus, Norimbergae Jo. Petreium, MDXXXIIII" (Quart, 32 Bl. ohne Seitenzahlen). Der ungenannte Verfasser ist jedoch Jordan Nemorarius[2]) (aus dem Anfange des 13. Jahrhunderts). In dem angeführten Algorithmus findet man die Species in ganzen Zahlen, die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel, die Lehre von den gemeinen und sechzigteiligen Brüchen und die Proportionen. Die Definitionen sind korrekt; für die Rechnungsschemata, Regeln, Demonstrationen und Beweise sind allgemeine Zahlen gewählt.

§ 15. **Das älteste gedruckte deutsche Rechenbuch** erschien 1482 bei Heinrich Petzensteiner in Bamberg, Verfasser desselben ist Ulrich Wagner, ein Nürnberger Rechenmeister. Es ist ein Pergamentdruck, und von der ganzen Auflage ist kein einziges Exemplar mehr vorhanden, nur wenige Reste (9 kleine Pergamentstreifchen in der Gröfse einer Visitenkarte) eines solchen bewahrt die Königl. Bibliothek zu Bamberg auf. Kein einziger Historiker kennt das Buch und kein bibliographisches Nachschlagewerk enthält eine Notiz[3]) darüber. Am Ende des Buches steht mit roten Lettern: „Anno dn̄i ... 1482 kl' 16. Junij p. Henr. peczensteiner Babenberge: finit Ulrich wagner Rechēmeister zu Nürnberg." Das Buch ist mit denselben Typen gedruckt, mit denen Petzensteiner[4]) 1483 ein zweites Rechenbuch (auf Papier) druckte; neben den alten Zifferformen 8, q, Λ für 4, 5 und 7 sind auch schon die neueren zu finden, letztere jedoch seltener; jede Kolumne trägt eine rote Überschrift. Eine von uns angestellte Vergleichung der beiden Drucke (von 1482 und 1483) ergab, dafs sie inhaltlich nicht gleichlautend sind. — Solange nicht ein ganzes Exemplar des Druckes vom Jahre 1482 aufgefunden wird, lassen sich weitere sichere Nachrichten darüber nicht geben.

---

1) Den Katalog seiner Werke siehe bei Doppelmayr; auch in Hain, Repertorium bibl. Nr. 13775 ff.

2) Siehe über ihn: Treutlein, Abhandlungen z. Gesch. d. Math. 1879 II, 127 ff.

3) Aufser im Serapeum 1847 S. 126, wo es der Besitzer anzeigt.

4) Petzensteiner druckte von 1482—1490 in Bamberg; vergl. Faulmann, Gesch. der Buchdruckerkunst S. 173.

Die Auffindung dieses deutschen arithmetischen Druckes hat eine gewisse nationale Bedeutung und zwar insofern, als nun die Italiener zeitlich den Vorrang nicht mehr geniefsen; denn wir haben mit dem Wagnerschen Rechenbuche 1482 die arithmetischen Drucke in Deutschland bis zu demselben Jahre zurück nachgewiesen, aus welchem der erste italienische Druck arithmetischen Inhalts stammt. (Bei Hain Nr. 3659 und 4955.)

§ 16. **Das Bamberger Rechenbuch**[1]) **1483.** Wie bereits in § 15 erwähnt ist, druckte Petzensteiner in Bamberg 1483 ein zweites deutsches Rechenbuch (Papier, Duodez, 77 Blätter, ohne Titel, jede Kolumne mit roter Überschrift), dessen Ende (mit roten Lettern) lautet: „In zale Xp̄i. 1483. kl. 17. des Meyen Rechnung in mancherley weys in Babenberg durch heñr(. petzensteiner begriffen: volendet.“ Man könnte mit Müller[2]), gestützt auf den damals üblichen Gebrauch des Wortes „begreifen“[3]) für „ein Buch verfassen“, den Drucker Petzensteiner zugleich auch für den Verfasser des Buches halten. Wir sind aber, ausgehend von der Erwägung, dafs wenn Petzensteiner 1483 ein Rechenbuch abzufassen im stande war, er das 1482 auch schon gekonnt haben würde und dann nicht die Dienste eines anderen (des Nürnberger Rechenmeisters Ulrich Wagner) in Anspruch genommen hätte, der Ansicht, dafs Petzensteinern die Autorschaft nicht gebührt, sondern ihm höchstens redaktionelle Verdienste zukommen. Wahrscheinlich ist genannter Wagner der eigentliche Verfasser; wir werden aber das Buch stets als „Bamberger Rechenbuch 1483“ bezeichnen.

Allen neueren Historikern[4]) über Arithmetik ist auch dieses Buch völlig unbekannt, obgleich sie bei hinlänglicher Benutzung der bibliographischen Hilfsmittel[5]) Kenntnis davon haben konnten. Drobisch schrieb 1840 über Widmanns Rechenbuch 1489 und bezeichnete[6]) dasselbe, auf Fischer[7]) fufsend, als das älteste deutsche Rechenbuch. Diesem Gewährsmann folgten die übrigen Historiker[8]), von denen sich mancher nicht

1) Exemplar in Zwickau, Ratsschulbibliothek; wahrscheinlich Unicum.

2) In Mann, Deutsche Blätter für erzieh. Unterricht 1879 S. 69 ff.

3) Schmeller, Bayerisches Wörterbuch 1872 I, 990.

4) Berlet, Wildermuth, Treutlein, Jänicke, Villicus.

5) Anzeigen stehen in: Brem- und Verdische Bibliothek 1756 II, 243. — Panzer, Zusätze zu d. Annalen d. ält. deutschen Litteratur 1802 S. 50. — Placid. Braun, Notitia historico-litteraria de libris ab 1480—1500 impress. Augsb. 1788 II, 107. — Hain, Repert. bibl. Nr. 13713. — Grässe, Literärgeschichte 1837—42 II, 2, 2 S. 854. — Allgem. deutsche Biographie XVI, 346. — Müller, Quellenschriften S. 334. — Wappler im Gymnasialprogr. Zwickau 1887 S. 10. — Monumenta Germ. Paed. 1887 III, 303.

6) Drobisch, De Joannis Widmanni Compendio Arith. Mercatorum Lips. 1840 S. 3.

7) Fischer, Typograph. Seltenheiten II, 39.

8) Berlet, Über Ad. Riese 1855 S. 10. — Wildermuth, Schmidts Encykl. VI, 734. — Treutlein, Rechnen im 16. Jahrh. S. 11. — Jänicke 1877 S. 289.

einmal um das Widmannsche Buch bemüht hat, obschon es nicht allzu selten ist. Gerhardt[1]) machte zuerst wieder auf das „Bamberger Rechenbuch 1483" aufmerksam, konnte es aber nicht auffinden; er setzt es in das Jahr 1473, in seiner Quelle[2]) stehen nämlich beide Jahrzahlen 1473 und auch 1483. Der Fundort für ein Exemplar dieses Rechenbuchs war schon 1839[3]) und abermals 1848[4]) bekannt gegeben.

Das Bamberger Rechenbuch 1483 ist hinsichtlich der Gruppierung und Anordnung des Stoffes von mehreren deutschen Rechenmeistern zum Muster genommen oder stark benutzt worden. Letzteres geschah vornehmlich, jedoch mit Verschweigung der Quelle, von Joh. Widmann 1489, welcher viele Stellen wörtlich entlehnt hat. Das Bamberger Buch erinnert an keinen lateinischen Algorithmus, sondern ist ein rein kaufmännisches Rechenbuch; es enthält nichts von dem arithmetischen Ballaste (griechische und römische Einteilung der Zahlen, Proportionen, Radicieren, Regula falsi, Regula virginum etc.), mit welchem sich die Rechenmeister des 16. Jahrhunderts beschwerten. Auffällig ist auch das Fehlen der welschen Praktik und das Rechnen auf Linien. Der Inhalt zielt nur auf Rechenfertigkeit ab und berücksichtigt ausschliefslich praktische Bedürfnisse, diese jedoch ausreichend; Erörterungen über die Anzahl der Species und Kunstausdrücke, sowie Definitionen sind fortgelassen. Gruppierung und Anordnung des Stoffes sind wohlgelungen, der Vortrag ist einfach und klar, der Ton einnehmender Art. Die Aufgaben sind zahlreich, die beigefügten Resultate fast sämtlich fehlerfrei; bei jeder ersten Aufgabe einer neuen Gruppe ist der Lösungsweg gezeigt. Die Einkleidung der Aufgaben ist fast durchgängig nach demselben Muster getroffen: zuerst wird das Gegebene (Zahlen und Bedingungen) im Erzählston vorgetragen, darnach das Gesuchte mit der Frage „Nu willdu wissen" etc. markiert, hierauf der Lösungsweg beschrieben „Machs also" etc. und geschlossen mit einer tröstlichen Wendung wie „vnd ist gemacht" oder „vnd kumpt recht" und dergl. Es folgt eine Probe (Bl. 31 a):

„Item drey machen ein geselschafft. der erst legt 20 fl vnd stet damit 4 moned der ander legt 30 fl vnd vber 5 moned hebt er sein gelt wyder. d' drit legt 50 fl vnd stet damit 6 moned. Nu haben sie gewunen 120 fl wildu wissen was yglichē zu seinē teil gepurde. Machs also multiplicir yglichs gelt mit sein monedt-ꝭ als hernach stett

1) Gerhardt, Gesch. der Math. 1877 S. 30.

2) Brem- und Verdische Bibliothek 1756 II, 243.

3) Köhler, Incunabulorum bibliothecae Zwiccaviensis fasciculus primus, Zwickauer Gymnasialprogr. 1839.

4) Serapeum 1848 S. 150—157 und S. 163—169.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20 fl | 4 moned | 80 | Fac 18 fl | $^{6}_{53}$ |
| 30 | 5 | 150 | 33 | $^{51}_{53}$ |
| 50 | 6 | 300 | 67 | $^{49}_{53}$ |

Summir die gemultiplicirtẽ zal mit einãder werden 530. Nu machs als ein and' geselschaft Sprich 530 geben 120 was geben 80 vnd komen 18 fl $^{6}_{53}$ vnd souil gepurt dem der 20 fl gelegt hat. Nun mach die andern auch also vnd kumpt als obñ stet."

Die Ziffern haben folgende Gestalt:

1 Z 3 ጸ ɥ 6 Λ 8 9 0
Ʒ 4 5 7

Die doppelten Formen für 3, 4, 5 und 7 kommen untermischt vor, der Bruchstrich fehlt.

Wir lassen eine Inhaltsangabe folgen. Der Anfang lautet:

„Das Register.

Hienach volget dz Register dieses Rechenpuchleins nach seynen Capiteln vnd was in eynem yczlichen begriffen" ... Kap. 1: Numerieren. Kap. 2: Addieren unben. Zahlen. Kap. 3: a) Subtrahieren unben. Zahlen; im Falle einer zu grofsen Subtrahendenziffer wird deren dek. Ergänzung gesucht und dazu die Minuendenziffer addiert, und die nächste Subtrahendenziffer um 1 erhöht. b) Addieren und Subtrahieren mehrsortiger Zahlen. c) Die pythag. Einmaleinstafel. Kap. 4: Multiplicieren unben. Zahlen nach 5 Methoden, deren Verschiedenheit sich auf die Beschaffenheit der Faktoren gründet: a) zwei Faktoren, bestehend aus einer bedeutlichen Ziffer mit Nullen; b) ein einstelliger und ein mehrstelliger Faktor; c) zwei zwischen 10 und 20 liegende Faktoren, gelöst nach der unten als dritte alte Einmaleinsregel angeführten Vorschrift; d) zwei Faktoren mit je 2 bedeutlichen Figuren, gelöst durch Multiplikation ins Kreuz; e) zwei vielstellige Faktoren, gelöst nach unsrer Einrückungsmethode. Kap. 5: a) Dividieren unben. Zahlen; die Gruppierung ist nach der Gröfse des Divisors geschehen; b) Progressionen; die Summationsregeln (für die geom. und arithm. Progressionen) sind in Worten gegeben. Kap. 6: Multiplikation der Brüche; unterschieden sind drei Gruppen: Bruch mal Bruch, Bruch mal ganze Zahl, gemischte mal gemischte Zahl. Kap. 7: Addieren der Brüche, je zwei auf einmal durch kreuzweises Multiplicieren; vom Generalnenner ist nicht die Rede. Kap. 8: Subtrahieren der Brüche ausgeführt wie vorher. Kap. 9: Dividieren der Brüche in zwei Abteilungen, Bruch durch ganze Zahl, Bruch durch Bruch (gelöst durch kreuzweis Multiplicieren). Kap. 10: „Die gulden Regel"; a) Aufgaben mit der Einheit im I oder

III Gliede; b) in keinem Gliede die Einheit; c) in einem Gliede ein Bruch; d) in zwei Gliedern ein Bruch; e) in drei Gliedern ein Bruch; f) Anwendung der Regeldetri in Wareneinkaufsrechnungen. Kap. 11: „Vom wechsel“ = Umrechnungen von Geldsorten nach Cours, „auffwechsel“ genannt; z. B. „Wieuil Duc. sind 1578 Reichsfl. wenn man auffgibt $25\frac{3}{4}$ auf 100 duc. Secz also 125 fl $\frac{3}{4}$ geben 100 duc. was geben 1578 fl.“ Kap. 12: Warenrechnungen mit Gewinn- oder Verlustermittelung. Kap. 13: Gesellschaftsrechnung, sehr zahlreiche wohlgeordnete Aufgaben. a) Verschiedene Einlagen und gleiche Zeiten; b) Einlagen und Zeiten verschieden; c) gegebene Teilzahlen (A 2 Teile, B 3 Teile etc.); d) gegebene Teilbrüche; e) aufeinander proportionierte Teilzahlen; f) Gewinnberechnung, wenn die Einlagen während der Dauer der Unternehmung durch Vermehrung und Verminderung variieren. Kap. 14: Tolletrechnung (siehe unten). Kap. 15: Stich = Warentausch. Kap. 16: „Goltrechnung“ = Preisberechnungen für den Einkauf ungemünzten Goldes, wozu Rauhgewicht (in Mark, Lot und Quint), Feingehalt (in Karat und Gran) und der Preis für 1 Karat fein Gold gegeben sind. Kap. 17: „Von rechnūg vb' lant genāt“ = Preisberechnungen zur einfachen Regeldetri gehörig. Kap. 18: Resolvieren von Gulden und Schillingbrüchen in die kleinere Sorte. Kap. 19 bis 21 enthalten nur Tabellen, mit deren Hilfe die bei Gold- und Silberrechnungen vorfallenden lästigen Multiplikationen umgangen und die Resultate durch Addition gefunden werden können. Kap. 19: Der Preis für 1 Karat Feingold ist durch alle Tabellen fest, nämlich $3\frac{1}{2}$ fl; der Feingehalt variiert, er steht bei jeder Tabelle als Überschrift, hebt an bei 11 Karat und steigt (immer um 1 Gran zunehmend) bis zu 24 Karat, dem puren Golde. Aufgenommen sind in jede Tabelle 10 Preise für folgende Gewichtsmengen Rauhgold: 1 Mark, $\frac{1}{2}$ Mark, 4 lot, 2 lot, 1 lot, $\frac{1}{2}$ lot, 1 quint, $\frac{1}{2}$ quint, 1 Pfennig-gewicht, 1 Hellergewicht (sie steigen nach dem Gesetze der Halbierung abwärts). Kap. 20 enthält ebenfalls Goldtabellen, in denen jedoch der Preis für 1 Karat Feingold zu $3\frac{1}{2}$ fl und 3 Heller angenommen ist. Kap. 21 enthält ähnliche Silbertabellen.

§ 17. **Johann Widmann** von Eger, Meister der freien Künste und Lehrer der Mathematik an der Universität zu Leipzig, gab 1489 „Behēde vnd hubsche Rechenung auff allen kauffmanschafft“[1]) heraus; am Ende: „Gedruckt in der Fürstlichen Stath Leipczick durch Conradn̄ Kacheloffen Im 1489 Jare.“ (Oktav, 232 Blätter, ohne Seitenzahlen und ohne Blattzeichen.) Der Inhalt ist in drei Abteilungen gebracht:

I „vō kunst vn̄ art der zal an yr selbst“ (die Species in unben. gan-

---

1) Exemplare in Leipzig (Stadtbibl.), Zwickau (Ratsschulbibl.), Karlsruhe und München.

zen und gebrochenen Zahlen); II „vō der ordenung der zal“ (Proportionen, Regeldetri, Zinseszins- und Terminrechnung, Mischungs-, Stich-, Gesellschafts-, Gold- und Silberrechnung, Regula falsi, schimpfliche Exempel); III „von der art defs messen die do geometria genant ist“, umfafst die letzten 32 Blätter.

Die Dreiteilung des Inhalts hat Widmann auch noch weiterhin durchgeführt. Die Veränderung der Zahlen geschieht bei ihm durch Mehrung (Addieren, Duplieren, Multiplicieren), durch Minderung (Subtrahieren, Medieren, Dividieren) und durch Mittelmofs (Numerieren, Progredieren, Radicieren). „In diesem theil wirt gesagt dye tzal auff kauffmanschafft geordnet / vnnd zum ersten auff kauffmanschafft nach der tzal / zum andern vff kauffmanschafft nach dem gewicht. Zum dritten auff kauffmanschafft nach der mafs.“

Die von Widmann eingeschlagene Ordnung ist in der Hauptsache von den folgenden Autoren beibehalten worden, namentlich weil sie Adam Riese und Jacob Köbel acceptiert hatten. Widmanns Vortrag ist stellenweise dunkel; Erklärungen findet man keine, sondern nur Regeln und Beispiele Auffällig sind die vielen Namen für seine Regeln, von denen sich jede fast nur auf je ein Beispiel bezieht: „Regula inventionis, fusti, pulchra, detri conversa, transversa, Ligar, positionis, equalitatis, legis, augmenti, decrementi, plurima, sententiarum, suppositionis, residui, excessus, collectionis, pagamenti, alligationis, bona, lucri“ etc. — Um Widmanns Art zu zeigen, wollen wir ein Beispiel der „Regula lucri“ hersetzen (Bl. 134): „Item 1 Leb vnd 1 hunt vnd 1 Wolff. Die essen mit eynander 1 Schoff. Vnd der Leb efs das Schoff alleyn in eyner stund. Vnd der wolff in 4 stunden Vnd der hunt in 6 stunden. Nu ist die frag, wen sy das Schoff all 3 mit eynander essen in wie langer Zeyt sy das essen. Machs also multiplicir 1 Stund 4, 6 mit eynander facit 24. Nu nÿ 1 gancz von 24 ist 24 vnd $\frac{1}{4}$ von 24 ist 6 vnd $\frac{1}{6}$ von 24 ist 4. Danach addir zusammen facit 34. secz also $\frac{24}{34}$ facit $\frac{12}{17}$ macht 42 minutē $\frac{6}{17}$ vnd ist die Zeyt.“[1])

Die Beispiele zu den Regeln sind durch kleine Holzschnitte, welche auf den Gegenstand Bezug haben, verschönert. Proberechnungen kennt Widmann die entgegengesetzte Species und die Neunerprobe. Als Quellen nennt er Jordanus, Campanus, Johannes de Sacrobusto, Boecius. Die Benutzung des „Bamberger Rechenbuchs 1483“ verschweigt er, obgleich er demselben viele Stellen wörtlich entlehnt hat. Die Zifferformen sind bereits die gegenwärtigen, nur eine alte 7 ist auf einem Holzschnitte zu finden.

---

1) Sie ist den Brunnenaufgaben nachgebildet, vergl. Cantor, Vorlesungen I, 329 und 393 und 525 und 718. — Leonardo Pisano führt (Scritti I, 182) eine gleichartige Aufgabe an, bei ihm verzehren 1 Löwe, 1 Leopard und 1 Wolf das Schaf, der Löwe in 4, der Leopard in 5, der Wolf in 6 Stunden.

1508 erschien eine neue Ausgabe[1]) des Widmannschen Buches unter demselben Titel, am Ende: „Gedruck zu Pfhortzheim von Thomas Anfselm Im jar als man zalt 1508.“ (Oktav, 162 numerierte Blätter.) Diese Ausgabe ist im wesentlichen ein Abdruck der vorigen, nur ist der Inhalt an einigen Stellen erweitert.

1526 besorgte Haynrich Stayner in Augsburg eine neue unveränderte Ausgabe.[1]) — Panzer[2]) führt noch eine Ausgabe an, welche 1519 von obigem Thomas Anfselm in Hagenau gedruckt wurde. Den Fundort für die letzte Ausgabe konnten wir nicht ermitteln, doch zweifeln wir sie nicht an, da Ansfelm um jene Zeit in Hagenau druckte.[3])

Ausführlich handelten über Widmanns Buch (1489) Fischer[4]) und nach ihm Drobisch[5]), jener über die typographische, dieser über die mathematische Seite. Diesen beiden folgend haben fast alle neueren Historiker das Widmannsche Rechenbuch als das früheste deutsche bezeichnet.

§ 18. **Lucas Pacioli**[6]), auch Lucas de burgo sancti sepulchri, hat das nach Inhalt und Form bedeutendste mathematische Werk im 15. Jahrhundert verfafst. Er war um die Mitte des 15. Jahrhunderts in Borgo San Sepolcro in Toskana geboren, trat in Perugia, Neapel, Mailand, Florenz, Rom und Venedig als Lehrer der Mathematik auf und starb 1509. Sein Werk: „Summa[7]) de Arithmetica geometria. Proportioni et proportionalita ... 1494“ (2. Aufl. 1523) zeichnet sich sowohl durch lückenlose Vollständigkeit und wohlgeordnete Gliederung des Stoffes, als auch durch Einfachheit und Klarheit des Vortrags aus. Es enthält neben der praktischen Arithmetik die ganze Algebra und Geometrie, sodafs darin die gesamte Summe mathematischen Wissens jener Zeit niedergelegt ist. Die Arithmetik umfafst neun Distinktionen, von denen man in der ersten einiges von den Leistungen der Griechen und Römer findet, vornehmlich Erklärung, Einteilung, Entstehung und Eigenschaften der Zahlen. Darauf folgt das indische Rechnen: Numeration, Addition, Subtraktion, Multiplikation (neun Methoden), Division (vier Methoden), Progressionen, Radicieren, Bruchlehre, Regeldetri, Proportionen, Regula falsi, Gesellschafts-, Zins-, Zinseszins-, Termin-, Mischungsrechnung, Buchhaltung, Tariffa. Unter letzterem Titel findet man Münz-, Mafs- und Gewichtvergleichungen und

1) Beide Ausgaben von 1508 und 1526 in München und Hamburg (Kommerzbibl.).

2) Panzer, Annalen I, 433.

3) Faulmann, Gesch. der Buchdruckerkunst S. 290.

4) Fischer, Typogr. Seltenheiten 1800 II, 39—52.

5) Drobisch, De Johannis Widmanni Compendio ... 1840.

6) Poggendorff. — Kästner, Gesch. der Math. I, 65 ff.

7) Exemplar in Leipzig, Universitätsbibl.

ie Wechselusancen der Haupthandelsplätze. Hierauf folgen Algebra und Geometrie.[1])

§ 19. **Margarita philosophica** von Gregorius Reisch 1504 mit einer Vorrede von 1496, ein encyklopädisches Werk, enthält einen kurzen Abschnitt über Rechnen, welcher in Frage und Antwort verfafst ist. Der Inhalt ist höchst dürftig. Man findet die spekulative Arithmetik nach griechischen Überresten, die römische Zahleneinteilung, die Species in ganzen und gebrochenen Zahlen, die Sexagesimalbrüche. Hierauf wird das Rechnen auf Linien eingeschaltet und mit der Regeldetri abgeschlossen. Die Holzschnitte zeigen noch alte Zifferformen für 4, 5 und 7, während die im Intext durch bewegliche Typen gedruckten Ziffern die neuere Gestalt haben.

§ 20. **Algorithmus.**[2]) Unter Algorithmus versteht man für damalige Zeit eine Schrift, welche das Rechnen nach indischer Weise lehrt; während man mit Abacus oder abacistisches Rechnen die römischen Rechnungsmethoden bezeichnet. Schriften mit dem Titel Algorithmus erschienen um die Wende des 15. Jahrhunderts mehrere[3]) in Deutschland.

Algorithmus linealis[4]), lateinisch, 6 Blätter, ohne Titel, am Ende: „Impressum Lipzik per melchiorem Lotter Anno xc̄“ (= 1490). Der ungenannte Verfasser lehrt nur das Rechnen auf Linien, welches von Appulejus erfunden und eine nützlichere, leichtere und bequemere Art als das Zifferrechnen sei. Jede der neun Species ist mit einem Beispiele in Wort und Bild vorgeführt; nur für das Radicieren fehlt die Ausführung.

Algoritmus integrorum[5]) von Johann Karl von Landshut, Leipzig 1504, 12 Blätter. Das Buch enthält acht Species (nur in ganzen Zahlen), ein Regeldetri- und zwei Gesellschaftsexempel. Bezüglich der Ausführung sind die beiden alten Einmaleinsregeln (s. unten) und die „Multiplication über sich“ bemerkenswert. Der Verfasser beruft sich mehrmals auf Joh. de sacro busto (Joh. von Sacrobosco † 1256).

Algorithmus linealis[6]) cum pulchris conditionibus Reguledetri: septem fractionum regulis · socialibus et semper exemplis idoneis. Balthasar Licht. Am Ende: Impressum Lipczk per Melchior Lotter 1509. — 15 Blätter. Man findet das Rechnen auf Linien, die Regeldetri in verschiedenen Abteilungen, je nachdem in den einzelnen Gliedern ganze oder gebrochene

1) Frühere ital. Rechenwerke bei Hain Nr. 3659, 1109, 4234, 15138.

2) Algorithmus ist der verstümmelte Name Alchwarizmî, der Beiname eines arabischen Gelehrten. Cantor, Vorlesungen I, 612. — Den ersten deutschen bisher noch ungedruckten Algorithmus vom J. 1445 haben wir herausgegeben in Zeitschrift für Math. u. Phys. 1888.

3) Siehe solche bei Hain Nr. 824—830.

4) Exemplar in Dresden, Königl. Bibl. „Math. Nr. 291“.

5) und 6) Exemplar in Dresden, Königl. Bibl.

Zahlen auftreten, zum Schlufs die Gesellschaftsregel. Treutlein[1]) führt eine Ausgabe von 1500 und Kästner (Geschichte der Mathematik) eine von 1513 an. Aus der wiederholten Drucklegung kann man auf die weitere Verbreitung des Werkchens schliefsen.

In der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts haben auch Gelehrte (Grammateus, Rudolff, Apian, Stifel) an der Bearbeitung der praktischen Arithmetik in deutscher Sprache teilgenommen, während in der zweiten Hälfte jenes Zeitraums dieses Geschäft ganz den Rechenmeistern und deutschen Schulhaltern überlassen blieb. Die Verfasser schrieben „ihren Schülern“ oder „dem gemeinen Mann“ oder „den Unwissenden und Liebhabern der Kunst zu nutz“ ein Lehr- und Übungsbuch der Rechenkunst, so gut sie dies vermochten. Aus diesem Umstande wird es begreiflich, warum die Rechenbücher hinsichtlich ihres pädagogischen Wertes in keiner Zeit eine so auffallende Verschiedenheit zeigen wie im 16. Jahrhundert. Je nach Darstellungsgeschick und Umfang ihres Wissens liefern die Autoren ein mehr oder minder vollkommenes Werk.

§ 21. **Jacob Köbel**[2]) war um 1470 in Heidelberg geboren, studierte daselbst Rechtswissenschaft, Mathematik und Astronomie, bezog 1490(?) zu weitrer Ausbildung die Universität Krakau und wurde 1511 Stadtschreiber zu Oppenheim, in welcher Stellung er bis zu seinem Tode blieb. Er besafs eine vielseitige Bildung, welche im Zeitalter des Humanismus so manchen Gelehrten zierte. Er war Baccalaureus beider Rechte, Protonotar, Rechenmeister, Dichter[3]), Zeichner, Holzschneider[4]), Buchdrucker und Verleger. Seine zahlreichen Schriften gehören der deutschen Litteratur, der Mathematik und der Rechtswissenschaft an.

1514 druckte Köbel sein erstes Rechenbuch: „Eynn Newe geordent Rechēbüchlein[5]) vf den linien mit Rechēpfenigen / den Jungen angenden zu heüslichem gebrauch vnd hendeln leichtlich zu lernen / mit figuren vnnd Exempeln / volgt hernach clerlichen angetzeygt“; am Ende: „Getrückt zu Oppenheym. Anno MCCCCCXIIII.“ (Quart, 6 unnumerierte und 24 römisch numerierte Blätter.) 1516 gab es Köbel in zweiter Auflage und 1518 in dritter heraus unter dem Titel: „Das new Rechēpüchlein[6]) Wie mann vff den Linien vnd Spacien / mit Rechēpfenningē / Kauffmanschaft vnd Tegliche Handelungē / leichtlich rechē lernē mage / zum Drittē male /

1) Treutlein, Rechnen im 16. Jahrhundert S. 24.
2) Allgem. deutsche Biographie XVI, 345 ff.
3) 1492 verfafste er „Tischzucht“, ein gereimtes Lehrgedicht über das Verhalten bei Festmahlen.
4) Proben giebt Faulmann, Gesch. d. Buchdruckerk. S. 317 ff.
5) Exemplar in München.
6) Exemplar in Leipzig, Universitätsbibl.

ebessert vñ zu Oppenheym getrückt 1518." Letztere ist eine verbesserte und vermehrte Auflage, sie hat 4 ungezählte und 46 römisch numerierte Blätter. Der Inhalt umfaſst: Erklärung der römisch und indisch geschriebenen Zahlen durch Zahlwörter, Vorführung der Münzen, Maſse und Gewichte, Anfertigung einer Rechenbank, Einteilung derselben in Bankire, Bedeutung der Linien und Spacien, Aufheben der Marken, Ausführung der Species auf Linien, Regeldetri, Gesellschaftsregel, Scherzexempel. — Der Vortrag ist überaus präcis und einfach. Besonders hervorzuheben ist der ausschlieſsliche Gebrauch römischer Zahlzeichen, welcher Umstand beweist, daſs dem gemeinen Volke die indischen damals noch nicht geläufig waren (vgl. § 5). Das eben besprochene Rechenbuch war ein sehr beliebtes Volksbuch, denn es wurde von 1514 bis 1520 sechsmal gedruckt. Auſser den drei Köbelschen Auflagen erlebte es noch drei Nachdrucke von Erhart Öglin in Augsburg 1514[1]), 1516[2]), 1520.[2])

Für das Zifferrechnen schuf Köbel 1520 ein neues Rechenbuch: „Mit der krydē od' Schreibfedern / durch die zeiferzal zu rechē / Ein neüw Rechēpüchlein[3]) / den angenden Schulern d' rechnūg zu erē getruckt. Vſs Kayserlichē gewalt begnadigt / In sechs Jaren bey Penc X mark golts nit nachzutrückē ... Geben zu Oppenheim Anno 1520." (Quart, 4 ungezählte und 40 römisch numerierte Blätter, Titelbild, Register.) Inhalt: 1) Numeratio (Ursprung, Lesen und Schreiben der Zahlen, römisch und indisch); 2) Additio; 3) Subtractio; 4) Duplatio; 5) Mediatio; 6) Multiplicatio; 7) Divisio; 8) Progressio; 9) Proben (die entgegengesetzte Species, Neunerprobe); 10) Bruchlehre (sehr dürftig); 11) Fünf Regeldetri- und zwei Gesellschaftsexempel. „Hie wil ich diessem Rechēpüchlein sein end geben. ... Ich wil auch mit der gnadē Gottes / noch ein grösser werke der rechnung / darin begriffen / Vſszyhung der wurtzeln / die Regeln des Falschen / Etlich Regeln Algobre / vnd ander lustig kunstlich rechnūg mit yren exempeln an Tag pringen." Die Beschreibung des Verfahrens ist überall mit groſser Ausführlichkeit und Einfachheit gegeben, sodaſs das Buch bedeutend leichter verständlich ist als der oft kurze und dunkle Vortrag des Adam Riese. Übungsmaterial enthält es nicht.

1515 erschien Köbels Visierbuch: „Eyn New geordēt Vysirbuch.[4]) Helt yñ Wie man vff eins yden Lands Eych vñ Maſs / ein gerecht Vysirrut machē vñ do mit ein ygklich onbekant Vaſs vysiren / auch seynen inhalt erlernen solle .... Oppenheym 1515." (Quart, 4 ungezählte und 28 römisch numerierte Blätter, viele Holzschnitte.) Über Visieren ist unten

1) Panzer, Annalen I, 373.
2) Exemplar in Nürnberg, Germ. National-Museum.
3) Exemplar in Bamberg, Königl. Bibl.
4) Exemplar in Leipzig, Universitätsbibl.

besonders gesprochen, wir heben hier nur den ausschliefslichen Gebrauch römischer Zahlzeichen hervor.

Die genannten drei Köbelschen Bücher: Rechēbüchlein vf den linien", „Mit der krydē", „Vysierbuch" gab der Verfasser 1531 zu einem Werke vereinigt heraus unter dem Titel: „Zwey rechenbüchlin[1]): vff den Linien vnd Zipfer / Mit eym angehenkten Visirbuch / so verstendtlich fürgeben / das jedem hierauſs on ein lerer wol zu erlernen. Durch den Achtbaren vnd wol erfarnen H. Jacoben Köbel, Statschreiber zu Oppeheym. 1531." (Oktav, Titelbild: 4 rechnende Personen verschiedenen Alters darstellend.) Diese Gesamtausgabe ist nicht ein einfacher Abdruck der Einzelausgaben jener Teile, sondern enthält stofflich bedeutend mehr, namentlich betreffs der angewandten Aufgaben. Die Deutlichkeit und Einfachheit des Vortrags eignen das Buch allerdings für den Selbstunterricht, wie der Verfasser durch den Titelzusatz selbst meint. Übungsmaterial hat es jedoch nicht; die Ziffern sind die indischen.

Vorgenanntes Buch erlebte 1532 durch Christian Egenolff in Frankfurt a. M. einen Nachdruck: „REchnen[2]) vnd Visieren / so verstendlich vnnd leicht fürgeben / das eim ieden hierauſs von sich selb wol zu lernen. Durch Jacoben Köbel Statschreiber zu Oppenheym. Mit vil schönen Exempeln der Mathematik vnd Astronomei gemehrt vnd gebessert." — 1573 erschien Köbels Buch noch einmal unter dem Titel: „Rechenbuch[3]) auff Linien vnd Ziffern ... Gerechent Büchlein auf alle Wahr vnd Kauffmannschaft / Müntz / Gewicht / Ellen / vnd Maſs viler Land vnd Stett verglichen." Arge rechnerische Versehen lassen vermuten, daſs diese Ausgabe von einer mit der Sache nicht völlig vertrauten Person besorgt wurde. Anhangsweise sind 92 inländische und fremde Münzen, welche damals in deutschen und welschen Landen im Handel gäng und gebe, verrufen oder verboten waren, zur Abbildung (Avers und Revers) gebracht. In Ansehung der ungeordneten Münzverhältnisse jener Zeit war dieser Anhang eine sehr praktische Zugabe für die Kaufleute.

Köbel hat in seinen Büchern sich allen gelehrten und entbehrlichen Beiwerks enthalten und nur praktische Bedürfnisse berücksichtigt, sodaſs sich der Titelzusatz „zu heuslichem gebrauch vnd hendeln" völlig bewahrheitet. Adam Riese hat diesen beliebten Volksbüchern manches entlehnt, ohne die Quelle zu nennen.

**§ 22. Joh. Böschensteyn.** Gleichzeitig mit Köbels Rechenbüchlein vf den linien" erschien: „Ain New geordnet Rechenbiechlin[4]) mit den

1) Exemplar in Dresden, Königl. Bibl.
2) Exemplar in Wolfenbüttel.
3) Exemplar in Dresden, Königl. Bibl.
4) Exemplar in Leipzig, Universitätsbibl.

zyffern den angenden schulern zu nutz Inhaltē die Siben species Algorithmi mit sampt der Regel de Try / vnd sechs regeln d' prüch / vñ der regel Fusti mit vil andern guten fragen den kindern zum anfang nutzbarlich durch Joann Böschensteyn von Esslingen priester neulych aufsgangen vnd geordnet"; am Ende: „Getruckt in .. Augspurg durch Erhart öglin Anno 1514 Jar." Es enthält nicht das Rechnen auf den Linien, sondern nur das Zifferrechnen. Anfang: „Welcher lernen will anfängklich rechnen durch dye zyffer yst not das er wysse die figurenn der Zyffer / Darnach lerne dye crafft vnd bedeutnus der stett (Stellenwert) daran die ziffer gesetzt werdē / Vnd seyn der bedeutlychen figuren newn / vñ ain figur ausserhalb dero wirt genant nulla / 0 / dye nichts für sich selbs bedeüt / Aber dye andern bey ir mer bedeüten macht." In einfacher kindlicher Weise werden die sieben Species gelehrt, wobei die mehrfachen Verdeutschungen der fremden Namen interessant sind: „Additio hayst Sumirung / Zusamenraytung / Ain zal zu der andern zölen vnd hauffen / Vil zalen in ain suma zefüren — Multiplicatio haist Merung / Manigfaltigung / auffsteygung / Vilmachung." In der Bruchlehre sind für jede Species je nach Beschaffenheit der gegebenen zwei Zahlen (ob ganz, gebrochen oder gemischt) acht verschiedene Fälle tabellarisch zusammengestellt. Verschieden sind sämtliche acht Fälle nur in der Division, in der Multiplikation reducieren sie sich auf fünf und in der Addition auf einen, in der Subtraktion sind mehrere unlösbar.

Die Regeldetri wird erst ohne, dann mit Brüchen gelehrt und hierauf in Einkäufen von „ayer, tuch, Samat, korn, Zin, wein, silber, Saffran, öll, Inber" angewendet. Gemischte Zahlen werden eingerichtet, das Kürzen wird nicht gezeigt. Eine Anzahl anmutiger Exempel („hüpscher fragen den jungen zu gut") machen den Beschlufs. — 1516[1]) erschien eine neue Ausgabe dieses Buches und 1518[2]) eine von Abraham Böschensteyn, dem Sohne des Joh. Böschensteyn, besorgte.

§ 23. **Grammateus**, eigentlich Heinrich Schreiber, stammte aus Erfurt und genofs seine Ausbildung auf der Wiener Universität, wo er auch den Magistergrad erwarb. Der lange Titel seines 1518[3]) zu Wien gedruckten Rechenbuchs giebt den Inhalt vollständig an: „Ein new künstlich behend vnd gewifs Rechenbuchlin / vff alle Kauffmanschafft. Nach gemeinen Regeln detri. Welschen praktic. Regeln falsi. Etlichen Regeln Cosse. Proportiō des gesangs in Diatonio / aufszutheylen monochordum. Orgelpfeiffen, vñ andere Instrumēt / durch erfindung Pythagore. Buchhalten durch das Zornal (Journal) / Kaps (von Kapsel = Kassabuch) vnd Schuldbuch. Visir

1) Treutlein, Rechnen im 16. Jahrh. S. 13.
2) Panzer, Zusätze zu den Annalen S. 150.
3) Exemplar in Hamburg, Kommerzbibl.

Ruthen zu machen / durch den Quadrat / vnd Triangel / sampt andern lustigen stücken der Geometrei. M. Henricus Grammateus. Wien. M.D.X.Viij." (Oktav, 96 Blätter mit Blattzeichen A Aij etc., Titelbild.) 1572[1]) wurde es unverändert in Frankfurt a. M. mit der Vorrede von 1518 von neuem gedruckt. — Das Buch ist für „Unwissende und Liebhaber der Kunst" bestimmt; die Darstellung trägt ein wissenschaftliches Gepräge. In der Anordnung der Species (Add., Mult., Subtr., Div.) ist deren Verwandtschaft mafsgebend gewesen. Die Bruchlehre findet durch eine Generalregel ihre Erledigung, indem in der Add., Subtr. und Div. auf gleichnamige Brüche zurückgegangen wird. Irrationale Quadrat- und Kubikwurzeln werden näherungsweise durch Anhängung von $2n$ bez. $3n$ Nullen an den Radikanden berechnet. Durch die Regula falsi sind auch solche Aufgaben gelöst, welche auf Gleichungen zweiten Grades führen, auch ist immer die Lösung durch die Algebra beigefügt. Eine ältere Darstellung des Buchhaltens in deutscher Sprache als die von Grammateus giebt's nicht.

Das Buch ist besonders deshalb leicht verständlich, weil die einzelnen Stufen eines Verfahrens gehörig von einander geschieden und als besondere „Regeln" (die Addition in drei Regeln, ebenso die Subtraktion etc.) vorgetragen sind.

Von Grammateus existiert noch ein zweites Rechenbuch, „Eyne kurz newe Rechen und Visyrbuechleynn[2]) gemacht durch Heinricus Schreyber von Erfurdt .. gedruckt zu Erfurdt durch Matthes Maler. 1523."

§ 24. **Adam Riese.** Wer hätte noch nicht „nach Adam Riese" gesagt, um diese Redensart als scherzhafte Begründung eines Resultats einfachster Rechnung zu gebrauchen. Adam Riese ist der berühmteste und einflufsreichste Rechenmeister des 16. Jahrhunderts, er ist der einzige, dessen Namen das Volk heute noch kennt und nennt. Über seine Lebensschicksale hat Berlet[3]) zuerst berichtet, die Berletschen Nachrichten sind seitdem an vielen Orten[4]) wiederholt aber nicht ergänzt worden. Man liest hin und wieder auch Unrichtigkeiten. Was wir geben, ist sicher. Adam Riese (auch Ries, Rys, Ryse) war 1492 zu Staffelstein bei Lichtenfels in Franken geboren, 1522 ist er Rechenmeister zu Erfurt, 1525 finden wir

---

1) Exemplar in Dresden, Königl. Bibl.

2) Murhard I, 165.

3) Berlet, Über Adam Riese 1855. — Berlet, Die Coss von Adam Riese 1860, Progr. Realschule Annaberg.

4) Adam Ryse .. erläutert von A. Böhme im Schulblatt f. d. Prov. Brandenburg 1858 Heft 7 u. 8. — Westermann, Monatshefte 1864, Märzheft S. 593—598. — Treutlein in Abhandlungen zur Gesch. d. Math. 1879 II, 14. — Adam Riese .. von Max Allihn im Daheim 1878 S. 500—502. — Adam Riese im Vogtländer Anzeiger . . . Plauen 1880 Nr. 199.

ihn mit demselben Prädikate in Annaberg. Von 1528—1530 war er Recefsschreiber beim Bergwesen daselbst und hatte als solcher die Ausbeute der Erze ins Recefsbuch einzutragen. 1530 wurde er Gegenschreiber, als solcher führte er das Gegenbuch, in welches die Namen der Gewerke eingetragen werden, die Kuxe[1]) an den verschiedenen Gruben haben. Eine private Rechenschule leitete er nebenbei. 1559 starb er zu Annaberg. Ob er vorübergehend in Bamberg[2]) und Nürnberg[3]) gewesen ist, wird sich kaum entscheiden lassen. — Ad. Riese hatte keine Hochschule besucht, besafs aber kein geringes Mafs von Wissen; er verstand Latein und war sehr geschickt in der Geometrie, sodafs er einst einem Ingenieur eine Wette abgewann, die meisten rechten Winkel in der kürzesten Zeit zu zeichnen. Ehe der Ingenieur mit der Konstruktion der Senkrechten fertig war, hatte Riese schon eine Menge rechter Winkel im Halbkreise gezogen. Auch gemeinnützig war dieser berühmte Rechenmeister thätig, so stellte er 1533 im Auftrage des Annaberger Rates eine Brotordnung auf, d. i. ein Verzeichnis wie bei festem Brotpreise das Brotgewicht mit dem Getreidepreise steigen und fallen müsse; 1536 wurde genannte Brotordnung gedruckt.

Überall wird berichtet, Ad. Riese habe nur zwei verschiedene Rechenbücher, ein Oktav- und ein Quartbuch, verfafst; wir haben vier[4]) verschiedene Rechenbücher von ihm aufgefunden.

I. „Rechnung auff der linihen gemacht durch Adam Riesen vonn Staffelsteyn / in massen man es pflegt tzu lern in allen rechenschulen gruntlich begriffen anno 1518.[5]) vleysigklich vberlesen / vnd zum andern mall in trugk vorfertiget"; am Ende: „Getruckt tzu Erffordt durch Mathes Maler M.CCCCCxxv Jar." (Oktav, 43 von A bis Fviij signierte Blätter, Titelbild.) Das Büchlein enthält nur das Rechnen auf Linien, das Zifferrechnen ist nicht gelehrt; es ist jedoch kein einziges Beispiel mit Marken ausgeführt, nur ein Linienschema ist erklärt; das Verfahren ist überall beschrieben. Die Unterrichtsordnung ist diese: „Zum ersten sol ein yeder anhebender schuler lernen erkennen / die ziffer / darnach die linihen / alls den nidderlegen vnd aufheben." Inhalt: Numerirn, Addirn, Subtrahirn, Duplirn, Medirn, Multiplicirn, Dividirn, Progressio, Detri, Wechsell, Gewandt, Sylber vnd golltrechnūg, geselschafft, Stich, Resolvirung. Unter

1) Ein Kux ist $^1/_{160}$ einer Grube. 1 Grube = 10 Teile à 4 Viertel à 4 Kuxe.

2) Serapeum 1847 S. 126.

3) Abhandlungen z. Gesch. der Math. II, 65.

4) Die Kommerzbibl. zu Hamburg besitzt alle vier.

5) Von der ersten Auflage 1518 scheint kein Exemplar gerettet zu sein. — Ein Exemplar der dritten Auflage 1527 besitzt die Seminarbibl. zu Plauen im Vogtlande. — Exemplar der 2. Aufl. 1525 in Hamburg.

den eingekleideten Aufgaben giebt's manche heitrer Art, Stifel nennt sie „holdselig“. Hier ist eine solche aus der Gesellschaftsrechnung. „Item ann eynem tantz seyndt 546 personn darunder seyndt eynn dritteyll Jungegeselln / $\frac{1}{4}$ burger / $\frac{1}{6}$ edelleut $\frac{1}{8}$ pauern vnd $\frac{3}{4}$ Junckfrawen / Nun seyndt der Junckfrawen nit so vil / darmit sie alle tzu gleychenn tantzenn mügen / dann so offt 6 Junckfrawen tantzen / so manches mal muſs 1 person vnnder gemelten geschlechtern feyern / Frage ich / wieviel eynes ytzlichenn geschlecht in sonderheyt sey.“ Riese berechnet durch die untenstehenden Ansätze die Anzahl der Personen jedes „Geschlechts“ und dann die Zahl der „Feiernden“

| | | | Anzahl. | | | | Feiernde. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 8 Jungges. | 112 | | | 112 | 16 Jungges. |
| | | 6 Bürg. | 84 | | | 84 | 12 Bürg. |
| 39 | 546 | 4 Edel. | 56 | 294 | 42 | 56 | 8 Edel. |
| | | 3 Bau. | 42 | | | 42 | 6 Bau. |
| | | 18 Jungf. | 252 | | | | |

II. „Rechenung auff der linihen vnd federn in zal / maſs / vnd gewicht auff allerley handierung / gemacht vnd zusamen gelesen durch Adam Riesen von Staffelstein Rechenmeister zu Erffurdt im 1522 Jar. Itzt vff sant Annabergk durch in fleyssig vbersehen / vnd alle gebrechen eygentlich gerechtfertigt / vnd zum letzten eine hübsche vnderrichtung angehengt“; am Ende: „Gedruckt ... zu Errfordt durch Mathes Maler ... 1525.“ (Oktav, 76 signierte Blätter.) — In diesem Buche ist zuerst ganz kurz das Rechnen auf Linien gelehrt, dann folgt ausführlich das Zifferrechnen. Die Ordnung des Inhalts ist genau dieselbe wie in vorigem Buche, nur ist der Stoff beträchtlich erweitert. Wir finden hierin auch: Stichrechnung, Regula falsi, Regula cecis oder virginum, neun- und sechzehnzellige Zauberquadrate.

Das eben beschriebene Buch ist dasjenige, welches überall als das kleine Rechenbuch von Adam Riese bezeichnet wird; es hat viele Neuauflagen und Nachdrucke[1]) erlebt und wurde später (1533)[2]) mit einem Visierbuche durch Ehart Helm vermehrt, wodurch der Umfang auf 112

---

1) 1527 in Nürnberg, wovon ein Exemplar in München. — 1529 in Erfurt, Exemplar in Berlin; S. 1—20 dieser Ausgabe sind reproduciert von Otto Kübler im XXIV. Jahresbericht d. K. Wilhelm-Gymn. Berlin 1884. — 1530 in Erfurt, Exemplar in Dresden, Königl. Bibl. — Exemplar von 1535 und 1556 in Annaberg. — Wildermuth benutzte eine Ausgabe, welche 1544 von Egenolph in Frankfurt a. M. gedruckt ist; Schmidt Encykl. VI, 734. — 1574 bei Egenolphs Erben, Exemplar in Leipzig, Universitätsbibl. — Kästner (Gesch. der Math. I, 109) besaſs eine Magdeburger Ausg. 1579.

2) Exemplar im Gymn. zum grauen Kloster in Berlin.

Blätter wuchs. Dafs die erste Auflage 1522 erschien, steht auf Bl. 72: „Geben am Freitag nach Michaelis im 1522“; auch bezieht sich Ad. Riese in seinem grofsen Rechenbuche 1550 (Bl. 105) auf diese Ausgabe: „In meinem vorigen Büchlein / so 1522 in Erfurdt getruckt.“ In späteren Auflagen ist der Titel oft ein wenig geändert, doch sind die Worte: „Rechnung auf Linien und Federn in allerlei Hantierung“ überall beibehalten. Der Inhalt stimmt meist wörtlich überein.

III. „Rechnung[1]) nach der lenge / auff den Linihen vnd Feder. Darzu forteil vnd behéndigkeit durch die Proportiones Practica genant / Mit grüntlichem vnterricht des visirens. Durch Adam Riesen im 1550 Jar.“ (Bildnis des Adam Riese mit der Umschrift: „Anno 1550 Adam Ries seines Alters im LVIII.“) Am Ende: „Gedruckt zu Leipzig durch Jacobum Berwalt.“ (Quart, 196 Blätter.) Die drei bis jetzt genannten Bücher von Adam Riese unterscheiden sich wesentlich durch Stofferweiterung von einander. Das erste (von Jahre 1518) enthält nur das Rechnen auf Linien, im zweiten (von 1522) steht das Zifferrechnen im Vordergrunde und im dritten (von 1550) nimmt die „Practica“ einen sehr grofsen Teil des Raumes ein; auch ist das letztere in allen Teilen erweitert und das Aufgabenmaterial stark vermehrt. — Carolus Riese, der Enkel des Adam Riese, besorgte 1611 noch eine unveränderte Ausgabe[2]) des Quartbuches von 1550. Murhard[3]) zeigt noch einen Neudruck von 1656 an.

Rieses Rechenbücher sind ein Jahrhundert lang die beliebtesten und brauchbarsten Volksbücher gewesen. Stifel[4]) sagt: „welches (Rieses Oktavbuch 1522) bei uns geachtet wirt für das allergebreuchlichst“. Das Quartbuch 1550 ist auch thatsächlich das beste Rechenbuch seiner Zeit. Der Inhalt befriedigt die praktischen Bedürfnisse, dem schwereren Zifferrechnen geht das volkstümliche Rechnen auf Linien voran, der Vortrag ist einfach und meist deutlich, das Übungsmaterial ist ausreichend und in angenehmem Gewande[5]) gegeben. Viele Schriftsteller reproducieren sein allerwärts für mustergiltig gehaltenes Buch; wer den Inhalt desselben beherrschte, galt für einen Rechenmeister.[6])

1) Das Buch ist nicht selten.

2) Exemplar in Leipzig, Universitätsbibl.

3) Murhard I, 164.

4) Stifel, Deutsche Arithm. 1545 fol. 17.

5) Stifel entlehnte dem Adam Riese die Exempel der Regula falsi mit der Bemerkung, „die seinigen könnten nicht so holdselig ausfallen als die des Adam Riese“; Stifel, Deutsche Arithm. 1545, fol. 31.

6) „Man achtete sein Buch vor gar künstlich, dafs man sagte, wer Riesens Exempla solvieret, der soll für einen Meister in der Rechenkunst gelten“; Doppelmayr S. 169.

Rieses Unterrichtskursus besteht aus drei Stufen: a) dem Rechnen auf Linien (Species und angewandte Aufgaben), b) dem Zifferrechnen (Regeldetriaufgaben nach der gewöhnlichen Methode), c) dem Rechnen mit „forteil und behendigkeit[1]“ (hier werden alle Rechnungsvorteile gezeigt, als: verschiedene Multiplikations- und Divisionsarten, Kürzen in der Multiplikation und Division der Brüche, welsche Praktik als leichtere Lösungsart der Regeldetriaufgaben). Als Zugabe des Werkes folgen noch: Regula falsi, coeci, magische Quadrate, Visieren.

In dem Gange der Übungen sind einige methodisch richtige Grundsätze erkennbar: vom Konkreten zum Abstrakten (auf Linien — mit der Feder), vom Einfachen zum Zusammengesetzten (ohne — mit Kürzen). Auch die bewährte Regel repetitio est mater studiorum kommt in ersprießlicher Weise zur Anwendung, indem derselbe Stoff fünf- bis sechsmal durchgearbeitet wird, jedoch immer in andrer Form.

Das Unterrichtsverfahren selbst ist rein dogmatisch. Die Aufgabe beginnt, die Regel folgt, dazu kommt der Befehl: „thu ihm also“. An zahlreichen gleichartigen Aufgaben wird die Regel eingeübt, Entwickelung und Begründung derselben fehlen. Das Resultat wird durch eine Probe erhärtet. — Da jedoch die Methode wesentlich durch die Pädagogik bestimmt wird und diese Wissenschaft damals erst im Entstehen war, so verdient Riese mit seiner Lehrart alle Achtung. Fertige Rechner hat er durch dieselbe sicher gebildet.

IV. „Ein Gerechent Büchlein[2]) / auff den Schöffel / Eimer vnd Pfundtgewicht / zu ehren einem Erbarn / Weisen Rathe auff Sanct Annenbergk durch Adam Riesen 1533. Zu Leiptzick hatt gedruckt difs gerechent Büchlein Melchior Lotter. Volendet vnd aufgangen am abendt des Newen Jars 1536.“ Quart. Dieses Buch ist kein Rechenbuch im gewöhnlichen Sinne des Worts, sondern enthält Tabellen, welche zu Preisberechnungen dienen (siehe § 57).

Adam Riese hatte fünf Söhne: Adam, Abraham, Jacob, Isaac und Paulus. Abraham R. scheint der Amtsnachfolger seines Vaters in Annaberg geworden zu sein, später war er Kurfürstlicher Mathematicus in Dresden.[3]) Isaac R., Bürger und Visierer zu Leipzig, verfafste 1580: „Ein neues nutzbar gerechnet Rechenbüchlein“ ... (siehe § 57).

Kästner[4]) schreibt: „Reich hat sich der ehrliche Mann (Adam Riese) wohl nicht gerechnet; seine Tochter Anna hat im dreifsigjährigen Kriege

1) Behendigkeit bedeutete damals Kunstgriffe und schlaue Wege; Schmeller, Bayr. Wörterbuch I, 1122.

2) Exemplar in Hamburg, Kommerzbibl.

3) Beutel, Arithmetica 1693 S. 488.

4) Kästner, Gesch. der Math. I, 111.

zu Annaberg als Magd gedient.“ Das letztere ist wegen des Alters wenig wahrscheinlich; das erstere ist leicht glaublich, denn von der wiederholten Drucklegung[1]) des Oktavbuches (von 1522) wird der Autor wenig bis keinen Nutzen gezogen haben. Für das Quartbuch (von 1550) hatte er sich gegen Nachdruck geschützt: „Cum gratia et priuilegio Caesareo.“

§ 25. **Johann Brandt** ist einer der ersten, welche den Adam Riese nachgeahmt bis abgeschrieben haben. Sein Werkchen[2]): „KVNSTLICHE RECHENUNG MIT DER Zyffern vnd Pfennigen, Auff allerley handttierung durch M. Joh. Brandt synen schulern zur sunderlicher vbung vnd nutzung gemacht. Im Jar 1532. Collen“ (Oktav, 39 Blätter), hat schon denselben Titel wie Adam Rieses Oktavbuch von 1522. Es hat aber auch die gleiche Gruppierung und Anordnung des Stoffes, viele Stellen sind wörtlich entlehnt und ganze Reihen von Aufgaben herübergenommen; auch das poetische Loblied auf die Arithmetik, welches man bei Adam Riese 1529 findet und also anhebt: „Pythagoras der sagt fürwar“, hat Aufnahme gefunden.

§ 26. **Christoff Rudolff**, gebürtig aus Jauer in Schlesien und auf der Wiener Hochschule gebildet, hat unabhängig von Adam Riese sein Rechenbuch verfaſst: „Künstliche Rechnung mit der Ziffer vnd mit den Zalpfennigen sampt der Wellischen Practica / vnd allerley vortheyl auff die Regel de Tri / allen Liebhabern der Rechnung vnd sonderlich derselbigen kunst anfahenden Schülern zu nutz / Wien 1526.“ Spätere Ausgaben erschienen 1546, 1574, 1588. Genanntes Rechenbuch ist nach des Autors eigner Aussage eine Erweiterung des ersten Teils der 1525 edierten Coss.[3]) Es zerfällt in drei Teile: Grundbüchlein, Regelbüchlein und Exempelbüchlein. Im Grundbüchlein findet man: Numerieren, 4 Species in unbenannten Zahlen, Resolvieren, 4 Species in benannten Zahlen, Brüche (alles mit Ziffern), Rechnung auf Linien. Das Regelbüchlein enthält die Regeldetri (Herleitung aus den Proportionen) und die welsche Praktik. Das Exempelbüchlein (nur Aufgaben und Resultate) ist eine Aufgabensammlung zu den beiden vorigen Teilen; die einzelnen Titel sind: Gewinn, Verlust, Wechsel (heutige Kettensatzexempel, hierbei findet man den Kettensatz mit Anleitung zur Bildung und den Vorteilen des Kürzens), Über Land (Warenrechnungen), Gesellschaft und Theilung, Faktorei, Stich, von Bergwerk, Regel Alligationis. — Die „Schimpffrechnung“ (= Scherz) bildet den Anhang und umfaſst: Progressionen, Regula falsi, Regula virginum, Wurzelausziehung. Rudolffs Rechenwerk ist ebenso wie Rieses Buch ein Musterbuch

1) Murhard führt I S. 164 als Druckorte an: Erfurt, Frankfurt, Breslau, Leipzig, Nürnberg, Magdeburg, Wittenberg, Stettin.

2) Exemplar in Hamburg, Kommerzbibl.

3) Vgl. hierzu Treutlein, Abhandlungen zur Gesch. der Math. II, 15.

für andere geworden; der Verfasser trägt den Ansprüchen des praktischen Lebens Rechnung, macht als gewandter Rechner überall auf Rechnungsvorteile aufmerksam und zeigt als erfahrner Lehrmeister Klippen und Fehlerquellen. — 1530 liefs Christoff Rudolff ein andres Rechenbuch ausgehen: „Exempel Buchlin.[1]) Rechnung belangend ... Augsburg bei Heinrich Stayner."

§ 27. **Petrus Apianus**[2]), eigentlich Bienewitz, geboren 1495 zu Leisnig in Sachsen, ordentlicher Professor der Astronomie an der Universität zu Ingolstadt, Lehrer Karl V. und dessen Günstling, 1540 geadelt, gestorben 1552 zu Ingolstadt, ist einer von den wenigen Professoren an Hochschulen, welche die praktische Arithmetik in deutscher Sprache bearbeiteten. Allerdings hat Apian kein selbständiges Werk geschaffen, sondern Rudolffs Buch stark benutzt. Der vollständige Titel ist: „Eyn newe vnd wolgegründte vnderweysung[3]) aller Kauffmannfsrechnung in dreyen Büchern mit schönen Regeln vnd fragstucken begriffen. Sunderlich was fortl vnd behendigkeit in der Welschen Practica vnd Tolleten gebraucht wirdt. Desgleichen fürmalfs weder in Teutzscher noch in Welscher sprach nie gedruckt. Durch Petrum Apianum von Leyfsnick d' Astronomie zu Ingolstadt Ordinariū verfertigt"; am Ende: „Gedruckt vnd volendt zu Ingolstadt durch Georgium Apianum von Leyfsnick im Jar nach der geburt Christi 1527 am 9. tag Augusti." — Apians Buch unterscheidet sich von dem Rudolffschen nur in der Anordnung der Stoffe. Aus den beiden ersten Büchern Rudolffs hat Apian nur eins gemacht und darin das Rechnen auf den Linien vorangestellt. Das zweite Buch bei Apian enthält die Partien der Rudolffschen „Schimpfrechnung" und aufserdem die Kettenregel und Zinseszinsrechnung. Das dritte Buch bringt die welsche Praktik und Tolletrechnung. — Einiges Eigentümliche in Apians Rechenbuche ist: die Verwendung der 7 und 6 als Probezahlen neben der 9; die Berechnung der Zinseszinsen nach zwei Methoden (der einen liegt die Formel $\left(\frac{100+p}{100}\right)^n$ zu Grunde, die andre vermehrt von Jahr zu Jahr fortschreitend das Kapital nach der Formel $100 + \frac{p}{100}$); das Unterwärtsdividieren; die seltene Tolletrechnung. — Beweise giebt auch Apian keine.

§ 28. **Einige arithmetische Schriften besondrer Art.** Unter den folgenden Autoren deutscher Rechenbücher des 16. Jahrhunderts ist keiner, der von hervorragender Bedeutung wäre. Sie reproducieren Rieses oder

1) Exemplar in Wolfenbüttel.

2) Poggendorff. — Gerhardt, Gesch. der Math. — Allgemeine deutsche Biographie I, 505 ff.

3) Exemplar in Dresden, Königl. Bibl.

Rudolffs Buch. Der Stoff ist mehr oder weniger gekürzt, die Definitionen sind gewöhnlich sehr inkorrekt, die Regeln mangelhaft, der Vortrag ist stellenweise dunkel: sodafs im allgemeinen schwächere Leistungen geschaffen werden. Wir übergehen sie und führen nur noch einige von besondrer Eigentümlichkeit an.

Die für bestimmte Schulen geschriebenen Rechenbücher ermöglichen ein Urteil über den Stand des arithmetischen Unterrichts in der betreffenden Schulgattung.

Joh. Fischer[1]) schrieb für die Fürstenschüler zu Pforta und Grimma, hat in der Anlage Rudolffs Buch nachgeahmt (Grundbüchlein, Exempelbüchlein, Practicierbüchlein) und folgt in der Methode dem Adam Riese, von dem er viele Aufgaben entlehnt hat. Fischers lateinisches Compendium[2]) war zum Gebrauch in den lateinischen Schulen Sachsens anbefohlen.[3]) Jacob Frey[4]) (Augsburg) und Hegelin[5]) (Ulm) schrieben für ihre „Schulknaben“, Albert[6]) und Gülfferich[7]) für „angehende Rechner“. Wälckle[8]), Krafft[9]) und Helmreich[10]) liefern spezielle Bearbeitungen der welschen Praktik, unter denen die Krafftsche die beste ist. Sie besitzt auch die Form des Dialogs, eine seltene Eigentümlichkeit. Jede Definition, Regel oder Beschreibung trägt eine darauf gestellte Frage als Überschrift, sodafs dadurch dem Rechner dasjenige Moment markiert wird, worauf er sein Augenmerk jeweilig zu richten hat.

Nach Kraffts Zeugnis ist Simon Jacob von Coburg (gestorben als Stadtschreiber zu Frankfurt a. M. 1564) der „fürtrefflichste“ Rechenmeister in der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts; seine Schriften sind uns nicht zu Gesicht gekommen.

Die Bücher von Adam Riese[11]), Joh. Weber[12]), Joh. Otto[13]) und

1) Joh. Fischer, Ein Künstlich Rechenbüchlein ... Wittenberg 1559 bis 1592 vier Aufl.

2) Joh. Piscatoris Arithmeticae Compendium ... Lips. 1545 und später.

3) Vormbaum, Schulordnungen I, 281.

4) Jacob Frey, Exempelbüchlein ... Nürnberg MDLXIX.

5) Leonhart Hegelin, Ein künstlich Rechenbuch ... Ulm 1544.

6) Joh. Albert, New Rechenbüchlein ... Wittenberg 1541 und später.

7) Hermann Gülfferich, Ein new kurz Rechenbüchlein ... 1559.

8) Georg Wälckle, Die Wälsch practica ... Strafsburg MDXXXVI.

9) Joh. Krafft, Ein neues .. Rechenbuch ... durch die Welsche Praktik .. lm 1592.

10) Andreas Helmreich, Rechenbuch ... nach der welschen Praktica .. alle a. S. 1595.

11) Adam Riese, Ein Gerechent Büchlein / auff den Schöffel ... Leipzig 1536.

12) Joh. Weber, Gerechnet Rechenbüchlein ... Erfurth 1570.

13) Joh. Otto, „Calculator. Ein newes ... ausgerechnetes Rechenbuch ..“ 1579.

Isaac Riese[1]) enthalten nur Tabellen, aus denen die Warenpreise für eine beliebige Mehrheit bei gegebenem Preise für die Einheit entweder direkt entnommen oder durch leichte Additionen gefunden werden können. Vgl. § 57.

Joh. Obers[2]) und Georg Reichelstain[3]) versuchen sich in der arithmetischen Poesie, indem sie Definitionen, Regeln und Beschreibungen in poetischem Gewande bieten. Sie leisten damit der Methodik aber keinen Dienst, denn gar zu oft sind Genauigkeit und Schärfe des Ausdrucks dem Versmafs und Reime geopfert. Einzelne Verse finden sich auch anderwärts. Hier sind einige Proben.

„Numeratio die Erst fiur [= Species]
Thut vns yn der rechnung dyse stuer
Zöl ains Zway dreu vier / acht
So hast du die ersten figur mit macht.“ (Böschensteyn 1514.

„Hab achtung neun sein der figur /
On all beschwer auszusprechen pur.
Bei solchen ferner merk auch mich
Ein nulla steht vnaufssprechlich
Rund vnd formirt recht wie ein o /
Wirt dann dasselb versteh also
Ayner deutlichen fürgemalt
Bringts zehenmal so vil als bald.
Mit den kanstu recht numeriren
All zal aufssprechen vnd volfüren.“ (Obers 1545.)

„Addition lernet vil zal kürtzlich verstehn
Zusammenthun groschen vnd floren.
Schau wo zwen pfennig im spatio
Ligen hebs auff vnd leg ayn do
Auff d' nechsten lyni vbersich /
Desgleich so fünf liegen halt dich
Auff eyner lyni merk vnd guck /
Ins spatium drüber ain ruck.“ (Obers 1545.)

„So du magst von der obern nit
Ein ziffer subtrahirn mit sitt
Von zehen solt sie ziehen ab
Der nechst vnder addir eins, knab.“ (Reichelstain 1532.)

---

1) Isaac Riese, Ein neues nutzbar gerechnetes Rechenbuch ... Leipzig 158(
2) Joh. Obers, Newgestelt Rechenpüchlein . . Augsburg MDXLV.
3) Georg Reichelstain, Kauffmans handtbüchlein . . . 1532.

„Lern wol mit vleifs dafs eyn mol eyn
Szo wirt dir alle Rechnung gemeyn.“ (Widmann 1489 u. andre.)

§ 29. **Lateinische Rechenbücher.** Im Zeitalter des Humanismus, der das Latein als Unterrichtssprache vorschrieb, durften die für die lateinischen Schulen bestimmten Rechenbücher selbstverständlich in keiner andern als der lateinischen Sprache abgefafst sein. Der arithmetische Unterricht bezweckte in den lateinischen Schulen nur Kenntnis der Operationen; es war nicht einmal auf Rechenfertigkeit abgesehen, weshalb in den lateinischen Rechenbüchern Übungsbeispiele überall fehlen. Sie enthalten neben den Regeln nur ein Beispiel zur Illustration. Der Ausdruck ist bestimmter und die Darstellung wissenschaftlicher als in den deutschen Rechenbüchern; hie und da finden sich korrekte Definitionen und einige Versuche zur Begründung der Regeln; doch enthalten die allermeisten nur Regeln mit je einem Beispiele.

§ 30. **Hieronymus Cardanus**[1]), geboren 1501 zu Pavia, gestorben 1576 in Rom, besafs medicinische, juristische und mathematische Bildung, führte ein vielbewegtes Leben und trat in mehreren italienischen Städten als Lehrer der Mathematik auf. Seine wichtigsten mathematischen Werke sind: Practica arithmeticae generalis et mensurandi singularis 1539. — Ars magna arithmeticae. — Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus, Norimb. 1545. — Obwohl die Cardansche Formel mit Unrecht seinen Namen trägt, so wird Cardan doch immer einen ehrenvollen Platz in der Geschichte der Algebra einnehmen. — Die zuerst genannte Schrift umfafst das heutige Zahlenrechnen; die Darstellung ist zwar wissenschaftlich, doch stehen die Regeln ohne Begründung.

§ 31. **Reinerus Gemma-Frisius**[2]), geboren 1508 zu Dockum in Friesland, wurde Professor der Medicin an der Universität zu Löwen und starb 1558. Sein Werk „Arithmeticae practicae Methodus facilis 1540“ war in den lateinischen Schulen so beliebt wie Adam Rieses in den Rechenschulen, es erlebte ca. dreifsig Auflagen. Noch Christ. Wolf rühmt[3]) Gemmas leichtfafsliche Methode; er (Wolf) habe, da er in den Species noch nicht wohl fortgekommen sei, aus Gemmas Buche alle Regeln der Rechenkunst in wenigen Tagen erlernt. Genanntes Buch ist klein an Umfang (37 Blätter, Quart), aber reich an Inhalt, der aus Regeln mit je einem Illustrationsbeispiele besteht. Man findet: vier Species in ganzen Zahlen, Regeldetri, Brüche, Regula societatis, Regula alligationis, Regula

---

1) Cantor in Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. II. — Poggendorff. — Scheibel, Einl. z. math. Bücherkenntnifs II, 359.

2) Poggendorff. — Kästner, Gesch. d. Math. I, 129.

3) Wolf, Kurtzer Unterricht v. d. math. Wissenschaften 1750 S. 9.

falsi. — In Altdorf war durch die Gymnasialordnung 1575 der Gebrauch dieses Rechenwerks vorgeschrieben.[1])

§ 32. **Michael Stifel**, geb. 1487 zu Efslingen, wurde Augustinermönch, entwich 1522 aus dem Kloster, kam 1523 nach Wittenberg, gewann die Freundschaft der grofsen Wittenberger Reformatoren und erlangte auf Luthers Empfehlung mehrere Pfarrstellen (Mansfeld, in Oberösterreich bei Christof Jörger von Tollet, Lochau, Holzdorf). Darnach ging er nach Frankfurt a. O., Memel, Eichholz, Haffstrom bei Königsberg i. P., Brück bei Treuenbrietzen. Seine letzten Jahre verlebte er in Jena wahrscheinlich nicht in amtlicher Stellung, sondern als Privatlehrer der Mathematik; er starb 1567 daselbst. Das wechselvolle Leben Stifels mag wohl die Ursache sein, dafs die biographischen Nachrichten[2]) über ihn erheblich von einander abweichen, die sichersten enthält die Real-Encyklopädie[3]) für prot. Theologie 1884.

Stifel gab sich nicht allein ernsten theologischen und mathematischen Studien, sondern auch Träumereien über die Geheimnisse der Zahlen hin. Die erste Frucht seines schwärmerischen Spiels mit den Zahlen war: „Ein Rechen Büchlein vom End Christ. Apocalysis in Apocalysim, Wittenberg 1532." Darin benutzt er die Trigonalzahlen, um die Heimlichkeiten der Schrift, der Kirchen- und Papstgeschichte zu entdecken. Darauf berechnete er den Eintritt des jüngsten Tages auf den 19. Oktober 1533 und teilte das Resultat seinen Lochauer Pfarrkindern mit, welche ihr Hab und Gut bis dahin verzehrten. Stifel kam wegen seiner falschen Prophezeiung in Gefahr[4]) und nur Luthers persönliches Eingreifen entwand ihn den Händen des weltlichen Richters. Dieser Mifserfolg hatte Stifel das Weissagungsrechnen verleidet, und er gab sich nun nur noch strengwissenschaftlichen Studien hin, deren Frucht die berühmte „Arithmetica integra 1544" wurde. Stifel hat sich durch dieses Werk als einer der bedeutendsten Mathematiker des 16. Jahrhunderts dokumentiert. Er hat in jenem Werke die damals noch geheimen Vorteile der Algebra veröffentlicht und diese Wissenschaft durch eigne glückliche Untersuchungen über Potenzen, Progressionen und Figurenzahlen erweitert; er war der Entdeckung der Logarithmen nahe und Meister in der Herstellung magischer Quadrate. Im

1) Vormbaum, Schulordnungen I, 612.

2) Buck II, 256. — Kästner, Gesch. d. Math. I, 112—128. — Panzer, Annalen II, 99. — Cantor in Zeitschrift f. Math. u. Phys. II. — Poggendorff. — Westermann, Monatshefte 1863, Oktoberheft S. 1—40. — Gerhardt, Gesch. d. Math. S. 60.

3) Real-Encyklopädie f. prot. Theol. 1884, XIV, 702—706.

4) Sehr ausführlich hiervon in Westermann Monatshefte 1863, Oktoberheft S. 1—40.

Gebrauche der Regula falsi ging er noch einen Schritt weiter als Gemma-Frisius und löste durch sie Aufgaben, welche die Unbekannte in der fünften Potenz enthalten. — Durch eine Deutsche Arithmetik[1]), worin die Rechnung auf den Linien deutlich und sehr ausführlich erklärt ist, leistete er dem gemeinen Volke einen Dienst. Die selten gewordene Coss[2]) Rudolffs beförderte er mit Erläuterungen zu jedem Kapitel 1553 aufs neue zum Druck.

§ 33. **Petrus Ramus**[3]), geboren 1515 in Cuth bei Soissons, trat als Gegner der Scholastik auf. Weil er sich den Hugenotten anschlofs, mufste er Paris und 1560 Frankreich verlassen. Nach längerem Aufenthalte in Deutschland und der Schweiz kehrte er 1571 nach Paris zurück, wo er ein Opfer der Bartholomäusnacht wurde. Seine Bedeutung für die Philosophie ist gröfser als für die Mathematik. Die hierhergehörigen Schriften sind: „Scholarum mathematicarum libri XXXI, Basel 1569“ und „Arithmeticae libri duo, Basel 1567“. In letzterem Werkchen sind die Species in ganzen Zahlen, die Brüche, Proportionen, die Regeldetri, Gesellschaftsrechnung, Mischungsrechnung und die Progressionen behandelt. Die Darstellung ist deutlich, doch ohne Beweise, da die Sache so offenbar sei. Rechnungsvorteile erwähnt er keine. Die Aufgaben sind praktisch, manche unterhaltend, einige in poetischem Gewande.

§ 34. **Tartaglia**[4]) (Tartalea), von geringer Herkunft, Autodidakt, um 1506 zu Brescia geboren, verstand Latein und Griechisch, trat von 1530 in mehreren Städten als Lehrer der Mathematik auf: Verona, Piacencia, Venedig, Brescia. Er erklärte den Euklid und löste kubische Gleichungen, deren Auflösung er zwar selbständig doch nicht zuerst entdeckte.[5]) Alle seine Entdeckungen beabsichtigte er in einem grofsen Werke: „General trattato de numeri et misure“[6]) niederzulegen, doch starb er 1557 über der Ausarbeitung des dritten Teils; die ersten beiden Teile waren 1556 vollendet, die übrigen vier Teile sind von Curtio Trajano 1560 fertiggestellt worden. — Es giebt im 16. Jahrhundert keine praktische Arithmetik, welche dem Meisterwerke dieses Italieners an die Seite gestellt werden könnte. In Anlehnung an seinen Landsmann Lucas de

1) „Deutsche Arithmetica. Inhaltend die Haufsrechnung, deutsche Coss, Kirchrechnung. Nürnberg 1545.“ (Exemplar in Leipzig, Stadtbibl.)

2) Die Coss Christoff Rudolffs mit schönen Exempeln der Coss durch Michael Stifel Gebessert und sehr gemehrt, Königsberg 1553. (Ex. in Leipzig, Stadtbibl.)

3) Cantor in Zeitschrift für Math. u. Phys. Bd. II. — Poggendorff.

4) Buck II, 260. — Hankel. — Poggendorff. — Zeitschrift für Math. u. Phys. Bd. XXII.

5) Vergl. Ersch und Gruber XXXXIII, 235.

6) Exemplar in Leipzig, Universitätsbibl.

Burgo 1494 traf Tartaglia die äufsere Anlage seines Werkes und teilte es in sechs Teile, diese in Bücher, letztere in Kapitel. Der erste Teil enthält die kaufmännische Arithmetik. Der Umfang des Stoffes ist bei beiden Autoren, Lucas und Tartaglia, im grofsen und ganzen derselbe; die methodische Behandlung ist jedoch bei Tartaglia eine feinere. Dieser hat sein Augenmerk beständig auf das in der Praxis Notwendige gerichtet. Als Frucht dieses Strebens erkennt man eine erleichternde Sichtung der Materie einerseits und eine zweckmäfsigere Anordnung der einzelnen Teile andrerseits; so sind die überflüssigen Betrachtungen über Einteilung und Eigenschaften der Zahlen ausgeschieden, die Progressionen, das Radicieren und die Proportionen als für kaufmännische Geschäfte entbehrliche Partien abgesondert und im zweiten Teile vorgeführt. Hinsichtlich der Behandlung der einzelnen Teile überragt Tartaglia alle seine Zeitgenossen. Bald schickt er der Hauptübung zur Überwindung auftretender Schwierigkeiten passende Vorübungen voraus (der Addition das Einundeins, der Subtraktion das Einvoneins, der Multiplikation das Einmaleins, der Division das Einineins), bald läfst er Nachübungen zur Befestigung des erledigten Pensums folgen (Inversionsaufgaben nach der Bruchlehre). Hier zeigt er verschiedene Lösungsarten für dieselbe Operation (sieben Multiplikationsarten, drei Divisionsmethoden, fünf Wege zur Berechnung der Zinseszinsen), dort unterscheidet er verschiedene Fälle derselben Operation (Bruchlehre). In der bevorzugten Behandlung der Reduktionszahlen (vielseitige Verwendung derselben bei Multiplikationen und Divisionen) zeigt sich besonders die gehörige Würdigung des praktischen Bedürfnisses; ja er erweist demselben sein Entgegenkommen so weitgehend, dafs er neben der „natürlichen und künstlichen Practica“ auch eine „Venetianische Practica“ unterscheidet, welche nur auf venetianische Mafs-, Gewicht- und Münzverhältnisse gerichtet ist. Um die Anforderungen, welche Tartaglia an den Rechner stellt, nur durch ein Moment zu charakterisieren, sei erwähnt, dafs er das Einmaleins der ersten 40 Zahlen einzuüben befiehlt, und dafs er infolgedessen diese Zahlen wie einziffrige Multiplikatoren und Divisoren behandelt. Das sind Leistungen, welche ihm unsere volle Anerkennung abnötigen und welche zugleich darthun, dafs die Italiener damals allen Nationen in der Rechenkunst überlegen waren.

§ 35. **Christoph Clavius**[1]), Jesuit, geboren 1537 zu Bamberg, studierte in Coimbra und wurde Lehrer der Mathematik am Collegium seines Ordens in Rom, wo er 1612 starb. Geschrieben hat er über alle Zweige der Mathematik: „Opera mathematica, Mainz 1611“; 5 Bände. Ein Aus-

1) Buck II, 63. — Jöcher I, 1943. — Kästner, Gesch. der Math. I, 145. Poggendorff. — Allgem. deutsche Biogr. IV, 298.

spruch des Papstes Sixtus V. giebt Zeugnis von dem ausgezeichneten Rufe dieses Gelehrten. „Hätte der Jesuitenorden nichts weiter hervorgebracht als diesen Clavius, so wäre derselbe desfalls schon zu empfehlen.“ Wesentliche Verdienste erwarb sich Clavius durch die Mitarbeit an der Kalenderreform unter Gregor XIII. 1582. „Christophori Clavii Bambergensis e societate Jesu Epitome Arithmeticae Practicae, Rom 1583“ sollte nur der Vorläufer einer vollständigen Arithmetik sein, welche leider nicht erschienen ist. Hinsichtlich des Stoffes reicht Clavius bei weitem nicht an Tartaglia heran; denn es fehlen ihm die spezifisch kaufmännischen Partien: welsche Praktik, Zins-, Rabatt-, Zinseszins-, Wechselrechnung. In der methodischen Behandlung steht er aber mit ihm auf gleicher Höhe.

Aus den überall gegebenen zweckmäfsigen Anmerkungen, durch welche er bald das Verständnis eröffnet (warum das Produkt zweier Brüche kleiner sei als jeder Faktor; warum zuweilen bei Brüchen der Quotient gröfser als der Dividend sei, was doch der Definition des Teilens zuwiderlaufe), bald die Rechnung erleichtert (Herstellung eines Hilfstäfelchens mit den neun ersten Produkten des Divisors; Umkehrungsregel in der Division der Brüche), bald vor Fehlern bewahrt (Behandlung der Null im Multiplikator, desgleichen im Quotienten), bald den Wert eines Verfahrens kritisch beleuchtet (Unzulänglichkeit der Proben durch 9 und 7), bald die Verwandtschaft der Species hervorkehrt (Divisio est compendiosa quaedam subtractio, quemadmodum multiplicatio est compendiosa quaedam additio), bald die Genauigkeit des Resultats erörtert (Näherungswerte der Quadratwurzeln), erkennt man in ihm sowohl den gründlichen Mathematiker als auch den erfahrenen Lehrmeister. Nach Tartaglia ist Clavius der bedeutendste Schriftsteller über Arithmetik im 16. Jahrhundert; sein Compendium erlebte sieben Auflagen und wurde nach seinem Tode noch gedruckt.

§ 36. **Simon Stevin**, geboren 1548 zu Brügge in Flandern, war Buchhalter in Antwerpen, dann Steuerbeamter in Brügge, Lehrer und Günstling des Prinzen Moritz von Nassau, welcher von ihm die Buchführung lernte und seinen Lehrer dann zum Deichinspektor in Holland ernannte. 1620 starb Stevin. In der Geschichte der Physik ist er bekannt als Entdecker des hydrostatischen Paradoxons; in der Geschichte der Arithmetik hat er seinen Ruhm durch die Erfindung der Decimalbrüche[1]) begründet. Auch hat Stevin die ältesten Rabatt-Tafeln publiciert, worin zwar die Decimalbrüche nicht zur Anwendung kommen, die Vorteile dieses Bruchsystems aber durch Annahme eines sehr grofsen Grundkapitals (10 Millionen) erreicht werden. Stevins Werke wurden von Girard herausgegeben: „Les oeuvres mathematiques de Simon Stevin de Bruges. Le tout revu, cor-

1) La disme 1585; auch enthalten in Girards Gesamtausgabe 1634.

rigé et augmenté par Albert Girard, Leyden 1634." Der arithmetische Abschnitt ist im wesentlichen nach Art der lateinischen Kompendien verfafst, jedoch bemerkt man das Eigentümliche, dafs sämtliche Definitionen vorangestellt sind, dafs jede Operation als Problem auftritt, worauf die Auflösung und eine etwaige Begründung folgen. In dieser Vortragsweise erkennt man bereits den Übergang zu der später durch Sturm und Wolf wieder aufgefrischten „mathematischen Methode".

§ 37. **Titel und Vorreden der Bücher.** Die Titel sind durchgängig lang und geben den Inhalt meist vollständig an; daneben enthalten sie mitunter einen als besondere Empfehlung geltenden Zusatz, wie „auf alle Kaufmannschaft" oder „nach der Welschen Praktika" gerechnet; auch zeigen sie durch Wort und Bild diejenigen Kreise an, für welche das Buch bestimmt war. Rieses Holzschnitt zeigt zwei Knaben, einer mit Marken, der andre mit Ziffern rechnend; Albert bildet vier rechnende Männer ab; Köbel führt vier Rechner verschiedenen Alters vor.

Die Vorreden enthalten fast immer eine Lobrede auf die edle Rechenkunst, als eine Kunst, die nach Platons Ausspruche den Menschen erst vom unvernünftigen Tier unterscheide. Man redet von der hohen Bedeutung der Arithmetik mit den Worten der griechischen Philosophen, der christlichen Kirchenväter, der heiligen Schrift. Man spricht von ihrem praktischen Nutzen und betont ihren Wert als Hilfswissenschaft. „Keiner, der nicht rechnen kann, soll sich zu weltlicher noch zu göttlicher Kunst kehren." Nur mit ihrer Hilfe könne man den Gipfel der Philosophie erreichen, nur durch sie die Heimlichkeiten der Schrift erforschen. Und nichts kann, der nicht rechnen kann; aber omnia tunc novit, qui numerare potest. — Wir teilen eine Vorrede in Versen mit.

„In[1]) Zal / in Mafs / vnd in Gewicht /
All ding von got sein zugericht
Clerlich Salomon das sagt /
On zal / on Mafs / got nicht behagt
Beschreibt vns auch Sant Augustin
Vnd mandt vns fleifslich in dem syn
Sich sol kein mensch nit vndersten
Kein götlich / weltlich kunst begen
On Rechensart / durch ware zal
Bewert ist das in manchem val
Eyn mensch dem zal verborgen ist
Leichtlich verfurt wirt / Der / mit list /

1) Köbel, Das new Rechēpüchlein 1518.

Hör / was Plato geschrieben hat /
Alle Künsten ist Rechen not
Teglichen das wirt offenbar
Mit fleifs bedenkt ob nit sey war
Inn anfang aller Ding vff erdt
Clein / Grofs / Hübsch / gut / böfs oder werdt
Hat die Rechnung die erst stat /
Geleich die mutter zu yrem kind hat
Eyn Senger Syng / on zales kunst
Mefs Geometer / on yren gunst
Astronomus / den lauff der stern
Clar antzeig on Rechens begern
Herkenn (= erkenn) / Breit / Höh / Dick vnd auch schmal
Tarff doch Rethoric auch der zal /
Drumb kauff deym kind zu dieser stundt
Difs Buch / vnd Spar dich got gesundt. Amen."

Adam Riese schrieb einen Teil dieser Verse ab, obwohl er das Reimen )enso gut verstand wie Köbel. Hier sind seine Verse:

„Pythagoras[1]) der sagt furwar
All ding / durch zal werd offenbar.
Drumb seh mich an / verschmech mich nit /
Durchlefs mich vor / das ich dich bit.
Vnd merk zum anfanck meine leer /
Zu Rechens Kunst / dadurch ich keer.
In zal / ynn Mafs / vnd ynn Gewicht /

Es folgen Köbels Verse wörtlich bis:)

Leichtlich der wird verfurt mit list. (Dann weiter:)
Difs nym zu hertzen / bit ich seer
Vnd yder seyn Kind Rechen leer.
Wie es gehn Gott vnd welt sich halt /
So werden wyr ynn Ehren alt."

Wenn uns jetzt solches Rühmen und Anpreisen sonderbar erscheint, ist zu bedenken, dafs mit dem Stande der Arithmetik auch die An- hten über dieselbe andre geworden sind. Erwägt man, dafs es sich nals um die erste Ausbreitung der neuen Kunst in Volkskreisen han- .e, so wird man die starke Hervorkehrung des materiellen Nutzens gut- sen können; und in Erwägung der mächtigen religiösen Strömung des

1) Ad. Riese, Rechnung auff der linihen vñ Federn ... 1529, auch in 1530.

glaubensstarken Jahrhunderts wird man auch die Erwähnung geistlicher Aussprüche erklärlich finden. Ebenso natürlich ist es, dafs im Zeitalter des Humanismus die Aussprüche der griechischen Philosophen besondere Würdigung erfuhren.

## Drittes Kapitel.

### Arithmetik.

§ 38. **Fingerrechnen.** Geübt wurde im 16. Jahrhundert das „Rechnen auf Linien“ und das Zifferrechnen. Das letztere ist die heute noch übliche Weise, während erstere Art jetzt nicht mehr gebräuchlich ist. Einige[1]) versuchen noch eine dritte Art zu rechnen, ein Fingerrechnen, nachzuweisen. Wenn man jedoch das Rechnen definiert als ein Verfahren, aus gegebenen Zahlen unter gegebenen Bedingungen neue Zahlen herzuleiten, so läfst sich das Fingerrechnen als Rechnungsmethode nicht bezeichnen. Durch dasselbe wurden keine Resultate ermittelt, sondern nur Zahlen auf kurze Zeit gemerkt. Es ist nichts mehr, als eine Zahlendarstellung durch die Finger zur Unterstützung des Gedächtnisses.

Die Fingerrechnung, wie sie unten Apian meint, ist wahrscheinlich römischen Ursprungs. Die Römer benutzten bestimmte durch Beugen und Strecken der Finger erreichbare Stellungen, um dadurch die Zahlen von 1 bis 1 000 000 auszudrücken. Die Einer und Zehner stellte man durch die linke, die Hunderter und Tausender durch die rechte Hand dar; Legen der linken Hand auf Brust, Hüfte, linke Seite bedeutete die Zehntausender, dasselbe mit der rechten Hand die Hunderttausender; Falten der Hände galt eine Million. Genannte Fingerstellungen wurden benutzt, um beim Kopfrechnen Zwischenresultate so lange als nötig festzuhalten.

Alle Zeugnisse über Fingerrechnung enthalten einen weiterreichenden Gebrauch der Finger nicht. Man findet Abbildungen der Hände, Beschreibung der Fingerstellungen und die zugehörigen Zahlenwerte, begleitet mit der Bemerkung, dafs dieser Gebrauch der Finger beim „Rechnen im Sinne“ sehr dienlich sei. Bei Lucas de Burgo 1494 stehen (auf fol. 36) 36 Hände mit gebogenen Fingern und der Zahlbedeutung, das Rechnen damit ist nicht gewiesen. Stoy[2]) und Villicus[3]) haben die Abbildungen reproduciert, die ausführlichste Beschreibung der Fingerrechnung gab Friedlein.[4]) Das letzte Zeugnis über jene Methode ist eine Stelle in Apian 1527: „Er-

1) Treutlein, Rechnen im 16. Jahrhundert S. 22.
2) Stoy, Zur Gesch. des Rechenunterrichts I, 1876.
3) Villicus, Entwickelung des Zifferrechnens, Wien 1881.
4) Friedlein, Zahlzeichen und elementares Rechnen d. Griechen und Römer. 1869 S. 5, 6, 25, 56.

wechst aber eine zusammengesetzte zal (zweiziffrig), ſso schreib vnder die lini die fingerzal (Einer), vnd behalt die glidtzal (Zehner) im syn wie führ. Ob aber einer ſso gar vngeschickt wehr, vnd die zaln im sin zu behalden nit vermöcht, sol er die finger der linken Handt nach derselben zal, welche behalten sol werden, legen vnd heben. Darnach ſso er kommet zu den andern figurn, soll er die zal, welche er im syn behalten nach anleitung d' finger addirn. — Wie auch ein jetliche zal mit einer andern zal durch die finger beder hendt soll multiplicirt, dadurch auch die keuff im syn gemacht werden, wirstu in meinem Centiloquio[1]) finden."

Spuren von einer Zahldarstellung durch die Finger sind vielfach nachgewiesen worden, so bei den Ägyptern[2]), Römern[3]), bei dem schottischen Mönche Beda Venerabilis[4]), den Griechen[5]), Arabern[6]), Chinesen[7]).

Ein wirkliches Operieren mit den Fingern, d. h. Ermitteln von Resultaten, soll sich bis heutigen Tages in der Wallachei erhalten haben. „Man[8]) bedient sich dort der Finger, um das Produkt zweier einziffriger Zahlen, die gröſser als 5 sind, zu finden. Die Finger beider Hände erhalten vom Daumen zum Kleinfinger aufsteigend die Werte 6 bis 10. Hat man nun z. B. 8 mal 9 zu multiplicieren, so streckt man den Achterfinger (Mittelfinger) der einen und den Neunerfinger (Ringfinger) der anderen Hand vor. Die nach dem Kleinfinger hin noch übrigen Finger beider Hände (2 Finger und 1 Finger) multipliciert man mit einander und hat damit die Einer (2 mal 1 = 2) des Produkts. Die von dem Daumen aus vorhandenen Finger mit Einschluſs der vorgestreckten (3 Finger und 4 Finger) addiert man und hat damit die Zehner ($3 + 4 = 7$) des Produkts. — Beweis: Heiſsen $a$ und $b$ die Faktoren, so sind $10 - a$ und $10 - b$ die noch übrigen Finger bis zum Kleinfinger hin, $a - 5$ und $b - 5$ die Finger vom Daumen an. Die Regel läſst also $(10 - a)(10 - b) + 10(a - 5 + b - 5)$ bilden, das ist gleich $ab$."

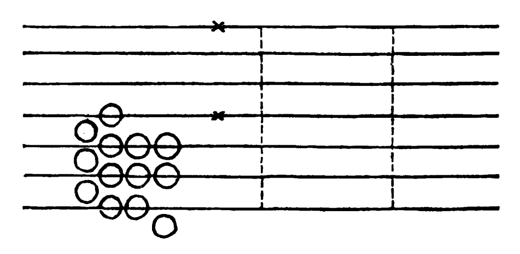
Ein ähnliches Verfahren soll sich bei französischen Bauern[9]) finden. Soll beispielsweise das Produkt 6 mal 8 gesucht werden, so schlagen sie von den ausgestreckten 5 Fingern der linken Hand ebensoviele Finger ein, wie 6 mehr ist als 5, nämlich einen, und von den Fingern der rechten

1) Ist nicht erschienen.
2) Cantor, Vorlesungen I, 42.
3) Ebenda S. 446 und 480.
4) Ebenda S. 710.
5) Ebenda S. 108, 435, 656.
6) Ebenda S. 609.
7) Lüben, Päd. Jahresbericht 1870, XXI, 8.
8) Hoffmanns Zeitschrift für math. Unterricht 1874, V, 57.
9) Haus und Schule. Päd. Zeitblatt. Hannover, herausgeg. von Spieker 1876 Nr. 50 u. 53.

Hand so viele, wie 8 mehr ist als 5, nämlich 3. Die eingeschlagenen Finger werden stets addiert ($1 + 3 = 4$) und bilden die Zehner für das zu suchende Produkt. Die gestreckten Finger beider Hände werden multipliciert ($4 \times 2 = 8$) und bilden dann die Einer des Produkts. — Man sieht bald, daſs dieses Verfahren mit dem vorigen identisch ist; denn es läſst sich die allgemeine Begründung für das französische Verfahren ebenso geben wie vorher. Sind nämlich $a$ und $b$ die gegebenen (über 5 betragenden) Faktoren, so sind die gestrecktbleibenden Finger beider Hände gleich $10 - a$ und $10 - b$, die eingeschlagenen dagegen sind gleich $a - 5$ und $b - 5$. Verfährt man nun nach der Vorschrift und vereinigt die zehnfache Summe der eingeschlagenen Finger $10(a - 5 + b - 5)$ mit dem Produkte der gestreckten $(10 - a)(10 - b)$, so ist in der That $10(a - 5 + b - 5) + (10 - a)(10 - b) = ab$.

§ 39. **Das Rechnen auf Linien.** Wir werden uns hierbei sehr kurz fassen, weil dieses instrumentale Rechnen kein lebendiges Glied in der Geschichte der Methodik bildet, da ein bleibender Gewinn für diese daraus nicht entsprungen ist. Dem heutigen Methodiker ist das Rechnen auf Linien völlig unbekannt, es hat nur historisches Interesse. Unsere Kürze ist auch deshalb gerechtfertigt, weil diese veraltete Methode in neuerer Zeit eine Behandlung[1]) erfahren hat so ausführlich, wie man sie kaum in den Originalquellen, den Rechenbüchern des 16. Jahrhunderts, findet. Die beste Darstellung gab Stifel in seiner „Deutschen Arithmetica 1545“.

Das Rechnen auf Linien ist ein Verfahren, mit Hilfe von Marken (Rechenpfennigen) und eines Linienschemas (Rechenbank) die Zahlen darzustellen und die Operationen zu vollziehen. Man zog auf dem Tische (auch auf Leder, Blei, Filz, Pergament) je nach Bedürfnis eine beliebige Anzahl paralleler Linien in wagerechter Richtung und gab jeder Linie und jedem Spatium einen Zahlenwert. Die Linienwerte von unten nach oben fortschreitend waren 1, 10, 100, 1000 etc., die Werte der Spatien 5, 50, 500 etc. Die ganze Anordnung entsprach demnach den römischen Zahlzeichen: I V X L C D M. Die Zahl $1887\frac{1}{2}$ wurde aufgelegt, wie nebenstehende Figur zeigt. Sieben



Linien reichten für gewöhnliche Bedürfnisse aus. Mit Kreuzen markierte man die Linien, auf denen die „Tausender“, „Tausendmal Tausend“ lagen;

1) Kuckuck, Die Rechenkunst im 16. Jahrhundert; Festschrift des Gymn. zum grauen Kloster, Berlin 1874.

es liegt hierin das Analogon[1]) zur Abteilung der in Ziffern geschriebenen Zahlen. — Bevor das Rechnen auf Linien gelehrt werden konnte, mufste das Numerieren in Ziffern erledigt sein, um den Rechner zur Umsetzung seiner mit Marken dargestellten Zahlen in Zifferschrift zu befähigen. Wir wenden uns jedoch sofort zur Ausführung der Species auf Linien.

Wollte man addieren auf Linien, so legte man die einzelnen Summanden nach einander auf und zog die Summe in ihre kürzeste Form zusammen, d. h. 5 Marken auf einer Linie wurden durch eine im nächsten Spatium und 2 Marken im Spatium durch eine auf der nächsten Linie ersetzt. Schliefslich wurde das Resultat in Zifferschrift umgesetzt. Behufs Addition mehrsortiger Zahlen wurde das Linienschema durch senkrechte Striche in so viele Abteilungen (cambi, Bankire) gebracht, als man Sorten hatte, und jede Sorte gesondert addiert. — Sollte eine Proberechnung angestellt werden, so mufsten die einzelnen Posten von der Summe weggenommen werden; „bleibt nichts, so hast du recht gethan."

Beim Subtrahieren wurde der Minuend aufgelegt, der Subtrahend aufgeschrieben. Die Subtraktion erfolgte stückweise, mit der höchsten Stelle begann man. Die liegengebliebenen Marken stellten den Rest dar. Unser „hebt sich auf" rührt her vom Subtrahieren auf Linien.

Fürs Multiplicieren wurde der Multiplikand aufgelegt, der Multiplikator geschrieben. Bei der Ausführung hätte nun jede Marke des Multiplikanden so vielmal niedergelegt werden müssen, als der Multiplikator Einheiten hat und zwar an denselben Ort. Weil aber dies Verfahren bei mehrstelligen Multiplikatoren sehr weitläufig geworden wäre, so geschah die Multiplikation mit Einern, indem man das Vielfache auf dieselbe Linie legte, mit Zehnern, indem man es eine Linie höher legte etc. Die den Multiplikand darstellenden Marken wurden successive entfernt. Die letzte Arbeit bestand in der Zusammenfassung der Marken zur kürzesten Form und Übertragung in Ziffern.

Die Division war eine wiederholte Subtraktion. Man legte den Dividend auf und nahm den Divisor so oft fort, als es ging, wobei der Quotient durch Marken auf den betreffenden Linien dargestellt wurde.

Die meisten Autoren begnügten sich, die Species in unbenannten ganzen Zahlen auf Linien gelehrt zu haben. Ad. Riese liefs auch die Regeldetri auf Linien üben. Zur Ausführung sei bemerkt, dafs er den Ansatz aufschrieb und nur die nötigen Multiplikationen und Divisionen auf Linien vornahm.

Auch der Summierung arithmetischer Progressionen auf Linien be-

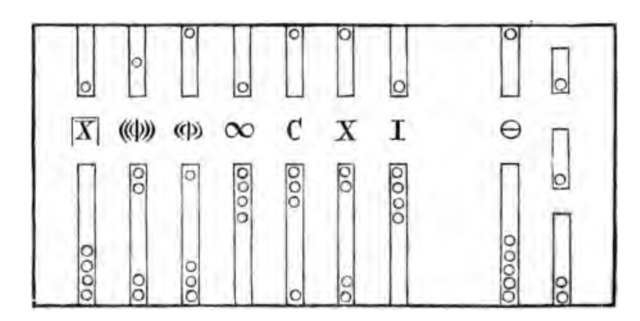
---

1) „Wo über der Zahl ein Punkt steht, setz auf die Linie ein Kreuz," Stifel, Deutsche Arithm. 1545.

gegnet man und zwar nach Art einer Additionsaufgabe oder unter Benutzung der Summenformel $(a + t)\,\frac{n}{2}$.

Das **Radicieren** war auf den Linien nicht üblich, weil bis zu derartigen Materien vorgeschrittene Rechner hinreichende Fertigkeit im Gebrauch des Ziffersystems hatten und des schwerfälligen Instruments der Linien nicht mehr bedurften. Nur bei Stifel[1]) und Köbel[2]) haben wir die Radicierung auf Linien gefunden; ersterer berechnet die Beispiele $\sqrt{82\,573\,569} = 9087$ und $\sqrt[3]{644\,972\,544} = 864$, letzterer das Beispiel $\sqrt{186\,624}$. Die Berechnung selbst geschieht nach den Formeln $a^2 + 2ab + b^2$ und $a^3 + (a + b)\,3a \cdot b + b^3$.

Die Frage nach dem **Ursprunge des Rechnens auf Linien** harrt noch der Entscheidung. Am häufigsten wird die Entstehung mit dem römischen Abacusrechnen in Beziehung gebracht. Der Abacus[3]) ist eine




Platte mit 7 langen und 7 kurzen Gleisen; erstere sind mit Kopfzahlen versehen, deren Werte von 1 anfangend in geometrischer Zehnerprogression bis 1 000 000 fortschreiten. In den langen Gleisen befinden sich vier Knöpfe, in den kürzeren nur einer. Der eine Knopf im kurzen Gleise gilt soviel als 5 Einheiten in dem zugehörigen langen Gleise. — Die übrigen rechts abgesonderten Gleise gehören nicht zur Darstellung des Zahlsystems, sie sind bei Gewichtberechnungen nötig und bedeuten Unzen und Bruchteile von solchen. — Sollen die Knöpfe zur Zahldarstellung benutzt werden, so müssen sie nach den Kopfzahlen, „dem Zähl-Ende“, hingeschoben werden; am Rande gelten sie nichts.

Wenn man den römischen Abacus um $90^0$ dreht, die langen Gleise durch Linien ersetzt und die Werte der kurzen Gleise auf die Zwischenräume überträgt, so hat man dadurch die deutsche Rechenbank gewonnen.

---

1) Stifel, Deutsche Arithm. 1545 Bl. 42.

2) Köbel, Zwei Rechenbüchlein . . . 1573 Bl. 45.

3) Friedlein, Zahlzeichen und elementares Rechnen der Griechen u. Römer 1869. — Desgl. Cantor, Vorlesungen I, 448 und 494.

Gegen diese Ansicht hält Gerhardt[1]) die Annahme aufrecht, daſs das Rechnen auf Linien die graphische Darstellung der chinesischen Rechenmaschine[2]), swán pân, sei, welche während des 15. Jahrhunderts durch den Handel in Deutschland bekannt geworden sei. Der swán pân ist ein Rahmen mit parallelen Drähten, welche durch einen Querstab in längere und kürzere Stücke geteilt werden. Die langen Stücke tragen je 5, die kurzen je 2 verschiebbare Kugeln; erstere haben die Werte 1, 10, 100 etc., letztere gelten 5, 50, 500 etc. Der Querstab ist das Zähl-Ende. Bei Vertretung der Gerhardtschen Ansicht ist es immerhin auffallend, daſs bei den Italienern, welche doch die damaligen Vermittler des Handels zwischen dem Orient und Deutschland waren, das Rechnen auf Linien nicht geübt wurde. Es war auſser einigen französischen Spuren nur in Deutschland heimisch.

Im 15. und 16. Jahrhundert glaubte man ziemlich allgemein, Appuleius (2. Jahrh. n. Ch.) habe das Rechnen auf Linien erfunden; doch ist diese Annahme ein Irrtum, denn sie hat bis jetzt aus den Schriften des Appuleius noch nicht bestätigt werden können.

Mag man die deutsche Rechenbank für die Nachahmung eines fremdländischen Apparats ansehen oder für eine rein deutsche Erfindung halten, so steht doch ihr Zweck unzweifelhaft fest, der kein andrer war, als dem gemeinen Volke das Rechnen nach indischer Weise dadurch zu erleichtern und zu vermitteln.[3]) Wer die Linien und das Auflegen verstand, konnte auch schon rechnen, wenigstens addieren und subtrahieren.

Mit der Ausbreitung des indischen Rechnens unter die breiten Volksschichten in Deutschland tauchte das Rechnen auf Linien auf, und es schwand in dem Grade, in welchem das bequemere Zifferrechnen Boden gewann.

Der arithmetische Wert des Rechnens auf Linien ist sehr scharf von einem berühmten Rechenmeister, Simon Jacob von Coburg, aus der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts charakterisiert worden. Dessen Kritik lautet: „Wahr ists, daſs sie zu Hausrechnungen, da man viel Summierens, Ausgebens und Einnemens bedarff, etwan förderlich erscheinen, aber in Kunstrechnungen, die ein wenig etwas wichtig, zum offtermal verhinderlich. Nicht sag ich, daſs man auf den Linien dieselben Rechnungen nicht

1) Gerhardt, Gesch. der Math. S. 29.

2) Vgl. Cantor, Vorlesungen I, 571.

3) „Die kunst des zelens vnd Rechnens mit den Rechenpfennigen ist erdacht vmb deren willen, so die buchstaben der Zifferzal nit gelernt. Vnd ist nützlich vnd dienstlich den Leyen zu häuslichem Gebrauch, auch zu ihren ämptern, Kellereien, Kauffmanschafften, Krämereyen, Wirtschaften vnd andern gewerben.“ Köbel, Das new Rechēpüchlein . . . 1518 Bl. XII.

auch machen könnte, sondern soviel vortheils ein Fuſsgänger, der leichtfertig und mit keiner Last beladen ist, gegen einen, der unter einer schweren Last stecket, hat, soviel vortheil hat auch ein Kunstrechner mit den Ziffern für einen mit den Linien.“ In ähnlicher Weise hatte sich schon Ch. Rudolff 1526 geäuſsert.

Der methodische Wert des Rechnens auf Linien liegt in der Anschaulichkeit desselben. Wer darin geübt war, erlernte mit geringerer Mühe das Zifferrechnen. Diese Thatsache hatte Ad. Riese empirisch erkannt und auch klar ausgesprochen: „Freundlicher, lieber Leser[1]), ich habe befunden in Unterweisung der Jugend, daſs alleweg die, so auf den Linien anheben, des Rechnens fertiger und lauftiger werden, denn so mit den Ziffern, die Feder genannt, anfahen. In den Linien werden sie fertig des zelens und für alle exempla der kauffhendel und Hausrechnung schöpffen sie einen bessern grund. Mügen alsdann mit geringer Mühe auff den Ziffern ihre Rechnung vollbringen.“

Im 17. Jahrhundert verlieren sich die Spuren des Rechnens auf Linien mehr und mehr. Einer der letzten Darsteller desselben ist Leonh. Christ. Sturm, welcher es aber dem Zifferrechnen nicht voranstellt, sondern nachfolgen läſst. Bis zu diesem Autor hatte sich auch die Ansicht über die Leichtigkeit dieser Rechnungsweise in ihr Gegenteil verkehrt. „Wenn ich die Wahrheit bekennen soll, so habe ich erfahren, daſs einem, der nicht gut rechnen kann, die Sache gar schwer ankomme. Wer es demnach nicht zur Curiosität und zu weiterer Confirmirung in dem judicio zu rechnen gebrauchen will, der lasse es lieber ganz bleiben.“[2])

§ 40. **Das Rechnen mit der Feder. Zahlzeichen und Numerieren.** Unter den Titeln: „das Rechnen mit der Feder“, „mit der Kreyden“, „auff Ziffern“ tritt uns im 16. Jahrhundert unser gegenwärtiges Zifferrechnen entgegen. — Die Formen der Ziffern stimmen seit Petzensteiners Drucken 1482 und 1483 mit den heutigen sämtlich überein, nur ihre Namen sind andere. Statt Ziffern sagte man „Figuren“ und stellte regelmäſsig das zehnte Zeichen 0 den übrigen neun gegenüber. „Es sein neun bedeutlich figuren, und die zehend ist ein vnbedeutliche.“[3]) Gleichzeitig führte man die Null mit einem der Namen: zero, cifra, zypfer[4]), nulla ein; letzteren gebrauchte zuerst Lucas de Burgo 1494, nach ihm Köbel[5]) 1515. In der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts ist der Name Ziffer auf alle Zahlzeichen übertragen und „Null“ für das zehnte Zeichen festgehalten.

1) Ad. Riese, Rechnung . . . nach der lenge 1550.
2) Sturm, Kurtzer Begriff d. g. Mathesis 1710 II, 16.
3) Köbel, Grammateus.
4) Vgl. Cantor, Vorlesungen I 432 und 610.
5) Köbel, Vysirbuch 1515 Bl. XV.

Das Numerieren galt damals bei den meisten Autoren für die erste Species. Für höhere Stellenwerte als 1000 fehlten besondere Namen sodafs aus der lästigen Wiederholung des Begriffs Tausend eine höchst schwerfällige Lesart grofser Zahlen entstand. Das Abteilen geschah durch Lücken, Punkte, Bögen[1]) oder Striche nach Triaden. Gemma-Frisius teilt durch Striche ab 23|456|345|678 und liest: „vicies et ter millies millena millia, quadringenta quinquaginta sex millena millia, trecenta et quadraginta quinque millia, sexcenta et septuaginta octo.“ In deutschen Rechenbüchern findet man meist übergesetzte Punkte als Abteilungszeichen 3̈ 629̈ 528̇ 614 und liest: „Dreitausend Tsd mal Tsd, sechshundert Tsd mal Tsd und 29 Tsd mal Tsd, 528 Tsd, 614.“ — Nur wenige: Lucas de Burgo, Köbel[2]), Tartaglia, Clavius kennen den Begriff der „Million“. Obgleich La Roche[3]) 1520 die ganze Reihe der Zahlbegriffe Million, Billion, Trillion etc. vorführt, tritt in Deutschland diese kompendiöse Numeration erst 1681 bei Heckenberg in Hannover auf und gelangt nicht vor dem 18. Jahrhundert zu allgemeiner Anwendung.

In der Behandlung des Numerierens leistet Clavius das beste. Alle seine Vorgänger und Zeitgenossen begnügen sich damit, gezeigt zu haben, wie eine möglichst vielstellige Zahl im Zusammenhange gelesen wird, sodafs sie thatsächlich nur den sprachlichen Ausdruck üben. Clavius erhebt aber auch den arithmetischen Inhalt einer Zahl, die Summe ihrer Einheiten, zum Bewufstsein, indem er die vorgelegte Zahl nach der Zehnerordnung zergliedert, den Wert jeder Ziffer durch angehängte Nullen vor Augen führt und durch Summierung der Teile die gegebene Zahl wieder gewinnt.

Tartaglia holt bei der Numeration etwas weit aus. Er geht zurück bis zu den des Lesens und Schreibens unkundigen Völkern, welche ihre Zahldarstellung[4]) durch Striche und Punkte nach der Menge der Einheiten bewirken, und welche auf Kerbhölzern ihre Conti in Soll und Haben halten. Er erwähnt hierauf die kompendiösere Zahldarstellung der Semiten und Griechen durchs Alphabet, die der Römer durch Buchstaben und Zeichen und schliefst mit dem Positionssystem der Inder.

Viele Schriftsteller des 16. Jahrhunderts lassen bei Gelegenheit des Numerierens die römische (numeri digiti, num. articuli, num. compositi) und griechische Einteilung der Zahlen[5]) (numeri primi, num. compositi; num. pares, num. impares; num. lineares, num. quadrati, num. cubi; Po-

---

1) Scritti di Leonardo 1202 S. 4.
2) Köbel, Mit der Krydē . . . 1520 Bl. IV.
3) Treutlein, Rechnen im 16. Jahrh. S. 42.
4) Vgl. Unger, Gesch. der element. Arithm. Progr. Reudnitz 1883 S. 4 ff.
5) Vgl. hierzu Unger, Gesch. der element. Arithm. 1888 S. 23.

lygonal-, Pyramidalzahlen; num. defecti, num. superflui, num. perfecti) mit einfliefsen, obgleich die Kenntnis davon zur Erlernung der Operationen ganz überflüssig ist.

§ 41. **Anzahl, Reihenfolge und Behandlung der Species.** Die meisten Autoren zählen mehr als vier Species auf, einige geben neun an: Numerieren, Addieren, Subtrahieren, Duplieren, Medieren, Multiplicieren, Dividieren, Progredieren und Radicieren; nur wenige begnügen sich mit vier. — Der Mangel an Übereinstimmung bezüglich der Anzahl der Species findet seine Erklärung in dem Umstande, dafs man unterliefs, den Begriff der Species zu definieren. Gemma-Frisius ist der einzige, der eine Definition versucht: „Vocamus autem species certas operandi per numeros formas.“ Bemerkungen über die gegenseitige Beziehung der Species sind äufserst selten. Den Gegensatz derselben berührt Köbel bei Gelegenheit der Probe: „Zu dem Ersten soltu wissen / das beinahe alle species vnder ynen selbs eynander wyderwertig sein;“ ihre Verwandtschaft hebt Clavius deutlich hervor: „Divisio est compendiosa quaedam subtractio quemadmodum multiplicatio est compendiosa quaedam additio.“

In der Reihenfolge der Species beobachtete man die obenstehende Ordnung, Abweichungen davon sind nur ausnahmsweise zu nennen; Grammateus ordnete: Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division. Gewöhnlich liefs man in jeder Species das Rechnen mit benannten Zahlen auf die unbenannten unmittelbar folgen; doch kommen auch Doppelkurse, einer in unbenannten und einer in benannten Zahlen vor, zwischen beiden steht dann das Resolvieren und Reducieren.

Die methodische Behandlung geschah durchgängig nach demselben Muster, das im wesentlichen fünf Stücke enthielt: die Definition, die Aufgabe, die Regel, die Übung und die Probe.

§ 42. **Definitionen.** Die Definitionen sind je nach dem wissenschaftlichen Standpunkte des Verfassers mehr oder weniger inkorrekt, dienen gewissermafsen nur als schickliche Einleitung zur Operation und werden mit deren Ausführung in keinerlei Beziehung gebracht. Häufig sind sie mehr Nominal- als Realdefinitionen. Wir begnügen uns mit einer Probe aus einem guten deutschen und einem lateinischen Buche. Grammateus: „Additio oder Summirung zeyget an die Summa viler zal. — Multiplicatio oder Mehrung beschreibt ein zal durch die andre multipliciren oder mehren. — Subtractio oder Abziehung offenbart die zal zu subtrahiren, oder ziehen ein zal von der andern, dafs da werde gesehen die vbrig. — Divisio oder Teilung giebt zu erkennen, wie offt ein zal in der andern wirt beschlossen.“ Clavius: „Multiplicatio est ductus unius numeri in alium. Tunc autem numerus quilibet in alium duci dicitur, cum alter ipsorum toties augetur, quoties in altero continetur unitas. — Divisio est

inventio numeri, qui toties unitatem contineat, quoties numerus dividendus divisorem continet."

**§ 43. Die Addition ganzer Zahlen.** Ein ausgerechnetes Additionsexempel hat damals schon dieselbe Form wie heute. Man findet regelmäfsig die erforderlichen Vorschriften für richtiges Untersetzen, für die Ordnung in der Addition der Kolonnen, für die Herübernahme etwaiger Ziffern aus den Kolonnensummen zur nächsten Ordnung. Alles geschieht durch Regeln, welche nur ein mechanisches Thun ohne Eröffnung des Verständnisses umfassen. Grammateus giebt drei Regeln für die ganze Addition: „Die erst Regel. Hab fleifs dafs die figuren gleich stehen vber einander, also dafs die erste sey gesatzt vber die erste, vnd die ander vber die ander etc. vnd ein linien darunter gezogen, vnder welche wirdt gesatzt die summa. Die ander Regel. Nimm den anfang von der rechten handt, vnd thu zusammen alle zal die da stehen an der ersten stat, als offt dann kommen in der zusammenfügung zwo figuren, so schreib die erst, vnd behalt die ander im sinn, welche ist zu geben der nechsten, vnd ist wieder zu thun wie vor also mit allen andern. Die dritt Regel. Zuletzt ist nichts im sinn zu halten, sondern es soll alles geschrieben werden. — Die weifs zu reden: Hab allemal im mund das wort vnd oder zu, als 3 zu 4 oder 3 vnd 4 machen 7."

Dafs die Fertigkeit in der Addition auf der raschen Vereinigung je zweier Einerzahlen beruht, hob Tartaglia genügend hervor. Er verlangte auch, dafs man die Summe je zweier „numeri digiti" im Kopfe haben müsse und stellte das Einundeins von $1 + 1$, $1 + 2$ etc. bis $9 + 9$ tabellarisch zusammen. Gleiche Tafeln finden sich schon bei Leonardo[1]) 1202, welcher auch noch die Zehnersummen bis $90 + 90$ aufgenommen hat.

Die vorkommenden technischen Ausdrücke in der Addition sind folgende: Additio, Summirung, Zusammenthuung; addiren, summiren, zusammenthun; termini addendi, colligendi, aggregandi, congregandi, summandi, posita; Summa, Aggregat, Collect, Product. Tartaglia vermittelt dem Leser den Begriff des Addierens durch zwölf synonyme Verben: aggiongere, aggregare, assunare, raccogliere, colligere, congiongere, coadunare, accozzare, combinare, amontanare, poner insieme, summare.

**§ 44. Die Subtraktion ganzer Zahlen.** In guten Büchern begegnet man einer Klassifikation der Aufgaben in zwei Hauptfälle, je nachdem die Subtrahendenziffer kleiner oder gröfser als ihre gleichnamige Minuendenziffer ist. Im letzteren Falle können drei Wege zur Lösung eingeschlagen werden: a) mit Entlehnen oder Borgen; b) mit Vermehren der Minuendenziffer um 1 und der nächsthöheren Subtrahendenziffer um 10; c) mit

---

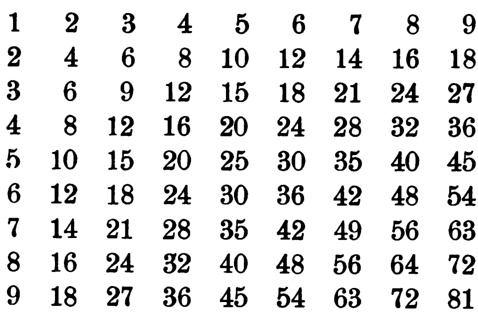
1) Scriti di Leonartdo I, 6.

Hilfe der dekadischen Ergänzung (man ergänzt die Subtrahendenziffer bis zu 10, fügt die Minuendenziffer der Ergänzung hinzu und vermehrt die nächsthöhere Subtrahendenziffer um 1). Nur Lucas de Burgo und Tartaglia lehren alle drei Lösungswege neben einander, in Deutschland ist der dritte Weg der gebräuchlichste. Clavius schenkte auch der Null im Minuenden besondre Aufmerksamkeit und Tartaglia schuf durch eine tabellarische Zusammenstellung des Einvoneins eine Vorübung für die Subtraktion, analog dem Einundeins in der Addition.

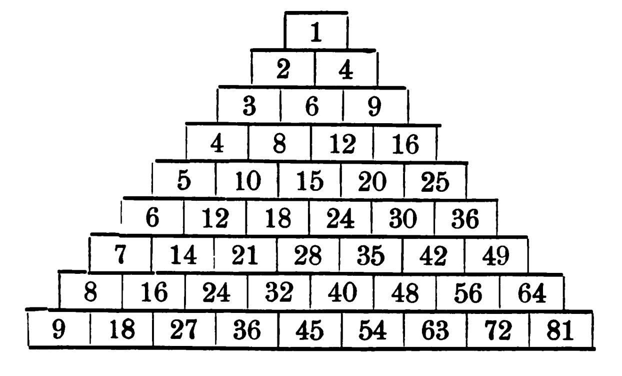
Als technische Ausdrücke figurieren hier: Subtractio, subductio, Abziehung; subtrahieren, abziehen; integrum, numerus minuendus, superior; subducendus, subtrahens, subtractor, inferior; Rest, residuum, reliquum, Relict, differentia.

§ 45. **Die Multiplikation ganzer Zahlen.** In der Ausführung der Multiplikation herrschte grofse Mannigfaltigkeit, Bücher mit einem halben Dutzend Multiplikationsarten sind gar keine Seltenheit. Von allen Autoren wird die Kenntnis des Einmaleins als unerläfsliche Vorbedingung bezeichnet. „Nu soltu merkē das aller grunt des multipliciren leȳt an diefsen nachuolgenden taffeln“ (Widmann). — „On difs fundament bawstu in diesser kunst vff ein ėyfs / das wollest allezeit bedenken“ (Köbel). — „Du mufst vor allen Dingen das einmaleins wol wissen“; (Ad. Riese).

Die Einmaleinstafel findet man in mancherlei äufserer Form, Quadrat und Triangel sind die herrschenden.



| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |



| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | |
| 2 | 4 | | | | | | | |
| 3 | 6 | 9 | | | | | | |
| 4 | 8 | 12 | 16 | | | | | |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | | | | |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | | | |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | | |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

Beutel (Arithmetica 1693) begleitet den hier mitgeteilten treppenartigen Triangel mit dem hübschen Reime: „Gleichwie man einen Thurm durch Staffeln muſs ersteigen, so muſs das Einmaleins den Weg im Rechnen zeigen.“

Einige fordern noch mehr als das kleine Einmaleins. Bei Köbel findet man beispielsweise auch: eine Tafel mit den ersten neun Produkten aller Zehner, eine mit den Quadraten der Zehner, eine mit dem groſsen Einmaleins. Die höchsten Anforderungen stellen in dieser Beziehung die Italiener Lucas de Burgo und Tartaglia; letztrer lieſs die ersten neun Produkte der ersten 40 Zahlen lernen und behandelte demgemäſs die zweiziffrigen Zahlen bis 40 wie einziffrige Multiplikatoren, z. B. $375 \cdot 36 =$ 36 mal 5, 36 mal 7, 36 mal 3.

Solch hohen Anforderungen gegenüber betonte Grammateus die Hinlänglichkeit des kleinen Einmaleins: „Auch ist nicht nötig zu lernen, als etliche sprechen, das groſs Einmalein, denn es giebt sich alles mit hilf dieser Tafel im setzen der Multiplication viler zalen.“

Nach Vorführung der Einmaleinstabelle werden gewöhnlich zwei oder drei Wege als alte Einmaleinsregeln erwähnt, um das kleine Einmaleins zu berechnen. Solcher Regeln giebt es drei, sämtlich zu finden bei Widmann 1489 und Rudolff 1526; Grammateus 1518 lehrt zwei.

Erste Regel. Multipliciere den einen Faktor mit 10 und subtrahiere davon das Produkt dieses Faktors mit der dekadischen Ergänzung des andern; z. B. $7 \times 8 = 7\,(10 - 2) = 70 - 14 = 56$; in allgemeinen Zahlen $ab = 10a - a\,(10 - b)$.

Zweite Regel. Multipliciere die dekadischen Ergänzungen der gegebenen Faktoren mit einander, ihr Produkt setze als Einer; subtrahiere irgend eine jener Ergänzungen von dem andern Faktor und füge die etwa gemerkte Ziffer hinzu, so erhältst du den Zehner des Gesamtprodukts. Beispiel: $7 \times 8$, die dekadischen Komplemente sind 3 und 2, deren Produkt 6 bildet die Einerzahl des gesuchten Produkts, eine der Differenzen $8 - 3$ oder $7 - 2 = 5$ ist die Zehnerzahl des Produkts; in allgemeinen Zahlen:

$$ab = 10\,[a - (10 - b)] + (10 - a)\,(10 - b).$$

Dritte Regel. Suche die dekadischen Komplemente der gegebenen Zahlen und multipliciere sie, ihr Produkt bildet die Einerzahl des gesuchten Produkts. Addiere die gegebenen Faktoren und füge die etwa vorhin gemerkte Ziffer hinzu, so hast du die Zehnerziffer des verlangten Produkts, nachdem du die linke Stelle jener Summe weggeworfen hast. Beispiel: $7 \times 8$; die Komplemente sind 3 und 2, ihr Produkt ist gleich 6, das ist die Einerziffer; $7 + 8 = 15$, davon die 1 weggeworfen, bleibt 5 als Zehnerziffer; in allgemeinen Zahlen:

$$ab = (10 - a)\,(10 - b) + 10\,(a + b) - 100.$$

Ein praktischer Wert ist vorstehenden Regeln schon damals nicht zugesprochen worden, trotzdem haben selbst die besten Schriftsteller ihnen die Aufnahme nicht versagt (Stifel, Clavius). — Der Wortlaut ist gewöhnlich sehr dunkel gehalten, weshalb wir auf die Wiedergabe verzichten, die allgemeine Begründung fehlt auch. Zum Beweise wollen wir nur Adam Rieses Worte für die zweite Regel anführen: „Multiplicir das da felt an 10 mit einander, was wird, setz. Darnach nimm von einander vbereck vnd das da bleibt, setz dahinder.“

Im Bamberger Rechenbuche 1483 sind nach der dritten Regel auch Produkte aus Faktoren, zwischen 10 und 20 liegend, berechnet.

Die „alten Einmaleinsregeln“ oder besser gesagt die komplementäre Multiplikation sind Reste römischer Rechnungsweisen.[1]) Ob sie nach Griechenland[2]) zurückführen, weifs man nicht; indische[3]) Spuren sind jedoch nicht vorhanden; desgleichen kennen die Araber[4]) keine komplementären Methoden. Dafs das oben (§ 38) genannte Fingereinmaleins hierher gehört, bedarf nur der Erwähnung.

Multiplikationsarten hat Lucas de Burgo acht zusammengetragen, welche Tartaglia wiederholte; jede trägt ihren eignen Namen, der gewöhnlich die Form des Schemas charakterisiert.

a) Die Multiplicatio per scachero (schachbrettartig) ist die heutige Methode mit Einrücken; schachbrettartig deshalb genannt, weil man um jede Ziffer der Teilprodukte ein kleines Quadrat zog.

b) Die Multiplicatio per castellucio geschah mit Ausrücken und Verwendung überflüssiger Nullen an den Teilprodukten, sodafs alle Stellen rechts ausgefüllt waren.

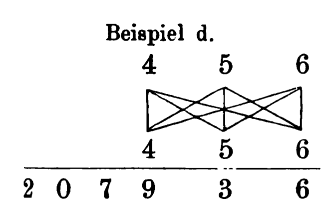
c) Die Multiplicatio per tabuletta wendete man an bei solchen zweiziffrigen Multiplikatoren, deren Einmaleins gelernt war resp. der Tabelle entnommen werden konnte; die Ausführung geschah nicht anders als mit einem einziffrigen Multiplikator.

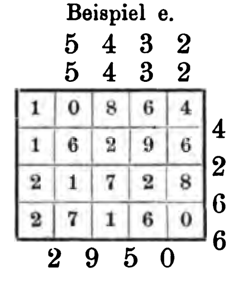
d) Die Multiplicatio per crocetta (kreuzartig) bildet zuerst das Einerprodukt, dann alle Produkte, welche Zehner liefern, dann alle, welche Hunderter ergeben etc., sodafs keine Zwischenresultate geschrieben werden. Bei vielstelligen Faktoren erfordert sie immerhin einige Aufmerksamkeit. Adam Riese sagt über sie: „Sie nimpt viel kopffs.“ — Diese Methode ist indischen[5]) Ursprungs, sie wurde die blitzartige genannt.

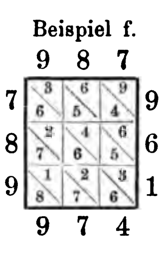
1) Cantor, Vorlesungen I, 495 und 754.
2) Ebenda S. 447.
3) Ebenda S. 520.
4) Ebenda S. 615 und 655.
5) Ebenda S. 519.

e) In der Multiplicatio per quadrilatero wird weder aus- noch eingerückt; die Ziffern gleicher Ordnung der Teilprodukte kommen in diagonale Richtung zu stehen, in welcher dann die Additionen zu vollziehen sind.

f) In der Multiplicatio per gelosia bedient man sich eines Quadratnetzes mit einfacher diagonaler Teilung; sämtliche Ziffern der Teilprodukte werden geschrieben, in diagonaler Richtung wird addiert.[1]) Faktoren und Produkt stehen aufserhalb des Netzes. — In Italien gab's vor den Fenstern der Damen dem Liniennetz gleichende Gitter, und gelosia heifst Eifersucht.




g) Die Multiplicatio per aschapezza (spezzare = zertrümmern) operiert mit Hilfe der additiven Zerstreuung eines Faktors; z. B. $67 \times 26 = 67(3 + 4 + 5 + 6 + 8)$.

h) Die Multiplicatio per repiego bedient sich der multiplikativen Zerstreuung; z. B. $234 \times 48 = 234 \times 6 \times 8$. — Adam Riese wendet diese Methode auch noch mit nachfolgender Korrektur an, der Faktor 23 wird als $(6 \times 4) - 1$ behandelt; $46 = (5 \times 9) + 1$.

In deutschen Büchern trifft man noch zwei auffällige Schemata, eins (Beispiel i), welches die Teilprodukte in Form eines Triangels anordnet; das andre (Beispiel k), welches die Teilprodukte über die Faktoren stellt. In Beispiel i beginnt man links und schreibt die Ziffern der Teilprodukte immer in die höchstmögliche Stelle. — In Beispiel k beginnt man auch links und addiert fortwährend die neuentstehenden Produkte zu den schon vorhandenen; das Produkt wird gebildet aus den obersten Ziffern der senkrechten Reihen.

Beispiel i.

```
   8 3 7
   3 5 9
 ───────────
 2·4 9 1 5 3
   4 2 5 7
     0 3 6
     1 2
     7 2
 ───────────
 3 0 0 4 8 3
```

Beispiel k. $359 \times 837$.

```
      4
    0 0
  0 7 9 8
  9 6 7 2
3 8 7 2 7 3
2 4 0 8 3 7
  3 5 9 9 9
    3 5 5
      3
```

1) Eine den Indern bekannte Methode. Cantor, Vorlesungen I, 520.

Es wäre ein Irrtum, wollte man aus dem Vorhandensein so vieler Multiplikationsmethoden den Schlufs ziehen, als seien diese der Mehrzahl nach in Gebrauch gewesen. Man bediente sich vielmehr nur der Methode mit Einrücken. Die Zugabe der übrigen geschah dem Herkommen gemäfs oder aus Grofsthuerei.

Zum Schlufs wollen wir noch eines nicht ungeschickten Verfahrens des Tartaglia gedenken, zweistellige Zahlen im Kopfe zu multiplicieren.

I. Zwei Faktoren mit gleichen Zehnern: Man fügt zu dem einen Faktor die Einer des andern, multipliciert die Summe mit dem Zehner und vermehrt dies Produkt noch um das Produkt beider Einer; Beispiel: $24 \times 28 = (28 + 4)\ 20 + (4 \times 8)$; in allgemeinen Zeichen $(m + n)\ (m + r) = m\ (m + n + r) + nr$, worin $n$ und $r$ die Einerzahlen und $m$ die Zehnerzahl bedeuten.[1])

II. Zwei Faktoren mit ungleichen Zehnern: Man addiert zu dem gröfseren Faktor den Einer des kleineren, multipliciert diese Summe mit dem kleineren Zehner und fügt noch das Produkt hinzu, gebildet aus dem Einer des kleineren Faktors und dem Überschusse des gröfseren Faktors über den kleineren Zehner; Beispiel: $38 \times 47 = (47 + 8)\ 30 + 8\ (47 - 30) = 1786$; in allgemeinen Zahlen: $(m + n)\ (m + r) = m\ (m + n + r) + nr$, worin $m$ den Zehner und $n$ den Einer des kleineren Faktors und $r$ die Differenz des gröfseren Faktors und kleineren Zehners bedeuten.

Technische Ausdrücke: Multiplikation, Mannigfaltigung; multiplicieren, mannigfaltigen, mehren; Multiplicandus; multiplicans; Produkt, proveniens summa.

§ 46. **Die Division ganzer Zahlen.** Die Division wurde dem angehenden Rechner immer als die schwierigste Species bezeichnet. Die herrschende Methode war das Überwärtsdividieren, ein Verfahren, welches der gegenwärtigen Methode garnicht ähnlich ist, es ist schwerfällig und undurchsichtig zugleich. Die charakteristischen Momente desselben sind: 1) Das Unterschreiben des Divisors unter den Dividend und sein Fortrücken bei jeder neuen Quotientenziffer, 2) das Überschreiben der Reste, 3) die Berechnung der Teilprodukte von links nach rechts, 4) die stückweise Subtraktion der Teilprodukte. Das folgende Beispiel a aus Lucas de Burgo 97 535 399 : 9876 = 9876 Rest 23, von dem links nur der Anfang (bis zur Erledigung der durch die erste Quotientenziffer verursachten Rechnungen), rechts die vollständige Ausführung steht, soll die Methode vorführen.

---

1) Die leichtesten Fälle, bei denen sich die Einer beider Faktoren ($23 \times 27$) zu 10 ergänzen, werden gegenwärtig hie und da als Paradestückchen in Schulen benutzt.

Beispiel a.

```
        8 6
      0 9 7 5
      1 6 3 0 1
      9 7 5 3 5 3 9 9 | 9
        9 8 7 6
```

```
          0 0
          1 5 0
          7 6 5
        0 8 2 9 0
        1 4 5 4 4
        8 6 1 0 2 2
      0 9 7 5 5 6 5
      1 6 3 0 1 5 7 3
      9 7 5 3 5 3 9 9 | 9 8 7 6
        9 8 7 6 6 6 6
          9 8 7 7 7
            9 8 8        Rest 23
              9
```

Erklärung dazu: Der Divisor 9876 wird unter den ersten Teildivisor 97535 gestellt, erste Quotientenziffer 9, $9 \times 9 = 81$, $97 - 81 = 16$ über 97 geschrieben, 9 im Divisor und 97 im Dividenden gestrichen; $9 \times 8 = 72$, $165 - 72 = 93$ geschrieben, 8 im Divisor und 165 im Dividenden gestrichen; $9 \times 7 = 63$, $933 - 63 = 870$ geschrieben, 7 und 933 gestrichen; $9 \times 6 = 54$, $8705 - 54 = 8651$ geschrieben, 6 und 8705 gestrichen. Damit ist die Subtraktion des Produkts $9876 \times 9$ beendet. Die Ziffern des zweiten Teildividenden 86513 stehen in 4 verschiedenen Horizontalreihen. Der Divisor wird eine Stelle nach rechts gerückt, zweite Quotientenziffer 8. Die weitere Ausführung ist eine Wiederholung des vorigen Verfahrens. — Die oben angegebenen charakteristischen Merkmale des Überwärtsdividierens sind ebensoviele Mängel dieser Methode. Das Aufsuchen eines Rechenfehlers ist in einem solchen Schema ohne Wiederholung der ganzen Durchrechnung unmöglich. Trotz dieser augenfälligen Mängel blieb das Überwärtsdividieren, wenn auch nicht die allein bekannte, so doch die allein geübte Divisionsart bis ins 18. Jahrhundert hinein.

Es wäre dem thatsächlichen Hergange nicht entsprechend, wollte man behaupten, jene Methode sei in ihrer wunderlichen Mifsgestalt erfunden worden; sie ist vielmehr die treue graphische Wiedergabe der indischen Rechnungsweise auf der Sandtafel. Auf dieser wurde mit einem Griffel in Sand geschrieben, alle Ziffern der Zwischenrechnungen beseitigte man durch Einebnung des Sandes, sobald man ihrer nicht mehr bedurfte, sodafs das Schema sich in grofser Einfachheit darstellt. Man sieht in jedem Stadium der Ausrechnung nur die notwendigen Zahlen: den Dividend in der Mitte, darunter den Divisor, darüber den Partialdividend resp. Rest, rechts den Quotient. Obiges Beispiel präsentiert sich nach der Ausrechnung in folgender Gestalt:

2 3
9 7 5 3 5 3 9 9 | 9 8 7 6
9 8 7 6

Mit der Verwendung von Tinte und Papier wurde die spurlose Tilgung der Ziffern unmöglich, ihre Häufung war die natürliche Folge; zur Erleichterung der Übersicht nahm man seine Zuflucht zur Durchstreichung der verbrauchten Ziffern.

Stifel bewirkte eine Verminderung der Ziffern dadurch, dafs er die abzuziehenden Produkte in ihrer Gesamtheit bildete und wie gegenwärtig subtrahierte. An dem Überschreiben der Reste und dem Fortrücken des Divisors hielt er fest. Beispiel b 1 902 942 : 2978 = 639.

Bei vielstelligen Divisoren wurde es nötig, die abzuziehenden Produkte zu notieren, was Clavius nebenan that. Beispiel c 1 902 942 : 2978 = 639.

Beispiel b.

2 6 8
1 1 6 1 0
1 9 0 2 9 4 2 | 6 3 9
2 9 7 8

Beispiel c.

2 9 7 8
1 9 0 2 9 4 2 | 6 3 9
1 1 6 1 . . | 1 7 8 6 8
2 6 8 0 . | 8 9 3 4
| 2 6 8 0 2

Mit Einschiebung der Produkte zwischen die Reste wäre Clavius zu dem heutigen Unterwärtsdividieren gelangt. Er wäre aber mit der Erfindung zu spät gekommen, denn jene Methode lehrte schon 1494 Lucas de Burgo (fol. 34) unter dem Titel divisio a danda (Beispiel d). — Auch Apian (1527) kannte diese Methode, nur stellte er alle Zahlen der Zwischenrechnung unter Nichtbeachtung des Stellenwertes senkrecht unter einander (Beispiel e). Apian leitet diese Divisionsart mit den Worten ein: „Ehe das ich anzeige wie man Practica dividiren sol, wil ich von wegen der fleifsigen Schüler, ſso alle Ding vnd heimlichkeit der rechenkunst erforschen wöllen, einen besondern brauch setzen, wi wol darinnen gar keine geschwindigkeit gespürt wirt.“

Beispiel d.

Divisor. Proveniens.
9 8 7 6 9 8 7 6
9 7 5 3 5 3 7 6
8 8 8 8 4
8 6 5 1 3
7 9 0 0 8
7 5 0 5 7
6 9 1 3 2
5 9 2 5 6
5 9 2 5 6

Beispiel e.

a b c
9 7 5 3 5 3 7 6 (9 8 7 6
9 8 7 6
8 8 8 8 4
8 6 5 1 3a
7 9 0 0 8
7 5 0 5 7b
6 9 1 3 2
5 9 2 5 6c
5 9 2 5 6

Adam Riese lehrt in dem Abschnitte: „Rechnung mit forteil“ auch das Unterwärtsdividieren mit Unterschreibung der Reste, doch ohne Notierung der Produkte und ohne Herunternahme der Dividendenziffern. Jacob Frey benutzt dieselbe Methode und nimmt auch die Dividendenziffern successive herab, sein Schema gleicht dem der sogenannten österreichischen Divisionsart. — Ohne Anschreibung der abzuziehenden Produkte und der sich ergebenden Reste lehren Lucas de Burgo und Tartaglia solche Divisionsaufgaben berechnen, die einen Divisor haben, dessen Einmaleins gelernt ist resp. der Tabelle entnommen werden kann (von 1 bis 40). — In dem Kapitel der „Practica“ begegnet man oft auch der successiven Division, welche dann angewendet werden kann, wenn der Divisor in Faktoren zerlegbar ist. $9876 : 48 = (9876 : 8) : 6$.

Als technische Ausdrücke kommen vor: Dividendus, divisus; divisor, dividens; quociens, procedens, exiens, egrediens, proveniens.

Die Mannigfaltigkeit der hier gegebenen Divisionsmethoden könnte die Meinung erwecken, als sei es um die Division nicht übel bestellt gewesen; dem gegenüber müssen wir ausdrücklich betonen, daſs man überall nur das Überwärtsdividieren nach Schema a übte. Selbst Lucas de Burgo und Tartaglia berechnen in ihren Werken nicht eine einzige Aufgabe nach der Methode unterwärts.

Im Unterrichte beging man den Fehler, den Unterschied zwischen Teilen und Messen garnicht oder nicht genügend hervorzuheben, was doch bei benannten Zahlen unerläſslich ist. Tartaglia ist der einzige, der es mit Schärfe thut. Eben dieser Autor hat wie die übrigen Species auch die Division mit einer Vorübung, dem Einineins, versehen; es werden die Zahlenreihen 0 bis 9, 0 bis 19, 0 bis 29 etc. 0 bis 89 beziehungsweise mit 1, 2, 3 etc. 9 dividiert[1]), wodurch eine Erleichterung für die Ermittelung der Quotientenziffern geschaffen wird. — Die besten praktischen Winke gab Clavius, seine Bemerkungen enthalten in der That alles, was zur Ausführung nötig und nützlich ist einschlieſslich der Korrektur begangener Fehler. Er bestimmt die Anordnung der gegebenen Gröſsen, erörtert die Anzahl der Quotientenziffern, erwähnt das Maximum des Restes, bespricht das Auftreten der Null im Quotienten, giebt den Weg zur Ermittelung der Quotientenziffern durch die erste Divisorziffer an. Zu den Schwierigkeiten der Species rechnet er die Korrektur eines Fehlers; hierbei zeigt er die Berichtigung einer zu groſsen und einer zu kleinen Quotientenziffer. — Mit den Schluſsworten des Kapitels über die Division: „Diese vier Species bilden die Fundamente, und alle arithmetischen Fragen können

---

1) Die Tafeln hat schon Leonardo 1202; Scritti di Leonardo I, 25 u. 26.

durch sie aufgelöst werden", dokumentiert Clavius seine Erkenntnis über die Leistungsfähigkeit der Grundrechnungsarten.

§ 47. **Die Probe.** Zur vollständigen Erledigung einer Species gehörte damals auch eine Proberechnung als Erhärtung des Resultats. Mit den Worten: „Die Prob ist ein zweyfel gewyſs machen. Eyn ygklich werke ist zweifelhofft vnd onuolkommē geacht / ee es zu end volnpracht / vn̄ genugsam probirt vn̄ bewert wordē ist /" sucht Köbel[1]) deren Notwendigkeit darzuthun. Gelehrt wurde die Probe durch die entgegengesetzte Species und durch Hilfszahlen; die Neunerprobe[2]) hatte die Herrschaft.

Die Neunerprobe ist gegründet auf die Gleichheit der Reste, welche sich ergeben, wenn man einerseits aus den gegebenen Zahlen und andrerseits aus dem Resultate die Neuner auswirft und die Reste aus den gegebenen Zahlen zu einem Reste nach Anleitung der Species vereinigt, d. h. die Reste der Summanden addiert, die aus Minuend und Subtrahend gewonnenen subtrahiert oder statt dessen die aus Subtrahend und Differenz erhaltenen addiert, die Reste der Faktoren multipliciert, desgleichen auch die Reste des Divisors und Quotienten. Diese so gefundenen Reste müssen dann stets gleich sein dem Reste des Facits. — Zur schnellen Auffindung des Restes oder der „Probezahl" einer Zahl ist nur die Berechnung der Quersumme und die Subtraktion des gröſstmöglichen Neunerprodukts davon nötig; von 9673 ist 7 die Probe. Mit Ausnahme der Addition treten in jeder Species vier Probezahlen auf, welche gewöhnlich in die Winkelräume eines liegenden Kreuzes[3]) gestellt wurden.




Die Mängel der Neunerprobe liegen in dem Umstande, daſs ganz verschiedene Zahlen dieselben Probezahlen liefern, daſs demnach ein Resultat, welches die Probe hält, doch falsch sein kann. Schon Lucas de Burgo (1494) deckte die Mängel der Neunerprobe in ihrer Vollständigkeit auf: a) Zahlen, welche um ein ganzes Neunerprodukt von einander abweichen, liefern dieselbe Probe z. B. 156 und 219; b) fehlende und überflüssige Nullen entdeckt die Neunerprobe nicht, 1064, 164, 10604 liefern dieselbe Probezahl; c) Umstellung der Ziffern (ein häufiger Schreibfehler) zeigt sie nicht an, 64735 und 46735 haben gleiche Probe. — Ansatzfehler

1) Köbel, Mit der Krydē 1520 Bl. 29.

2) Im Schulblatt f. d. Prov. Brandenburg 1858, VI, 376—384 hat Richter ausführlich über ihre Anwendung gehandelt.

3) Auf dem Brustbilde Ad. Rieses im Quartbuche 1550 befindet sich ein solches Probeschema, welches Jänicke, Gesch. d. Rechenunterrichts S. 290 falsch als Rieses „Wappen" deutet.

können garnicht in Betracht kommen. — Die besseren Schriftsteller empfehlen denn auch wegen der Trüglichkeit der Neunerprobe die Siebenerprobe, bei welcher man mit den nach Auswerfung der Siebenerprodukte hervorgehenden Resten ebenso verfährt als bei der Neunerprobe. Jene hat zwei Mängel weniger als diese; denn Umstellung der Ziffern, und fehlende und überflüssige Nullen bleiben durch sie nicht unbemerkt. Lucas de Burgo und Tartaglia probieren alle ihre Rechnungen durch 9 und 7.

Mit der Einführung der Siebenerprobe hätte man sich begnügen können, weil andre Hilfszahlen auch nichts mehr leisten; trotzdem schreiben Rudolff (1526) und Apian (1527), man könne durch jede Zahl probieren, und führen auch Proben mit 8, 7 und 6 aus. Fischer (1559) probiert mit 5, 6, 7, 8, 9 und 11.

Alle Proben durch Hilfszahlen sind mit dem Mangel behaftet, dafs sie die Abweichung einer Zahl um ein ganzes Vielfache der Hilfszahl nicht entdecken. Die Neunerprobe blieb darum die herrschende, weil sie die Probezahlen am schnellsten liefert.

Alle, welche den Wert der Neunerprobe in Zweifel zogen, empfahlen der gröfseren Gewifsheit wegen eine Proberechnung durch die entgegengesetzte Species.

Das Anstellen einer Probe war weniger ein spezielles Bedürfnis jener Zeit als vielmehr eine historische Überlieferung. Weil die Inder und Araber auf der Sandtafel rechneten und auf diesem Apparate alle Ziffern der Zwischenrechnung verschwanden, so konnte man sich nicht auf dem Wege der nochmaligen Durchrechnung von der Richtigkeit des Resultats überzeugen. Es standen zu diesem Zwecke nur die gegebenen Zahlen und das Facit zur Verfügung. Die Neunerprobe ist nun eine Methode, welche das Geforderte unter den gegebenen Bedingungen leistet. Mit der indischen Rechenkunst wurde auch die indische Probe überliefert und anfangs geübt, kam jedoch in der Folgezeit aufser Gebrauch.

§ 48. **Gemeine Brüche, Minutiae vulgares seu mercatoriae.** Mit der Vorbemerkung, dafs in der Bruchlehre auch nur zu addieren, subtrahieren, multiplicieren und dividieren sei, bahnt sich Clavius den Übergang von den ganzen zu den gebrochenen Zahlen. Fast könnte es scheinen, als sei er damit dem Rate Rudolffs gefolgt: „Allhie solt ein jeder beflissen sein, den anfahenden Schülern einzubilden die völlig Gleichheit der Species in ganzen und gebrochenen Zahlen. Würden alsdann den Gräuel so ihnen zusteht hinlegen, brüch annemen vnd endlich zu aller rechnung mehr geschicklichkeit erlangen.“ Die Vorstellung von der Schwierigkeit der Brüche war grofs, wurde sprichwörtlich und blieb es bis heute für ein Gebiet, auf dem man nicht weifs, wo ein noch aus („in die Brüche geraten“).

Auf die Entstehung des Bruches wurde nicht eingegangen, er war

einfach da. Den Anfang machte man mit dem Lesen und Schreiben: „Es ist zu merken / dafs ein ieglicher Bruch hat zwo figuren darzwischen ein linien. Die ober würt genannt der zeler / vnd die vnder der nenner. Die aussprechung der brüche ist also: nenne zum ersten die obere figur / darnach die vnder mit dem Wörtlein theyl als $\frac{2}{3}$ theyl“ (Grammateus 1518). Hierauf folgte eine Vorschrift über das Gleichnamigmachen zweier (selten mehr) Brüche: „Multiplicier ins Kreutz vnd die nenner mit einander.“ Darnach wurde vom Kürzen gehandelt, wobei die Aufsuchung des gröfsten gemeinsamen Mafses auf dem Wege der fortgesetzten Division (VII. Buch der Euklidschen Elemente) gezeigt wurde. Kennzeichen über die Teilbarkeit der Zahlen trifft man spärlich und selten. Hierauf wurden noch vier Regeln für die Species mit je einem Beispiele vorgetragen: „Wenn du hast reducirt brüch mancherley namen in einen nenner vnd wilt addiren, thu die zeler samen vnd setze den gemeinen nenner darunder; subtrahiren, ziehe einen zeler von dem andern, vnd vnder das vbrig setze den gemeinen nenner; dividiren, wirf den gemeinen nenner hindannen, vnd teyl einen zeler durch den andern. In der Multiplication multiplicirt man schlechthin zusamen die zeler vnd auch die nenner“ (Grammateus 1518). Damit war die Bruchlehre erledigt; Übungsbeispiele fehlen überall. In der eben charakterisierten Weise unterrichtete der grofse Trofs der deutschen Rechenmeister.

Besseres leisteten Lucas, Tartaglia, Stifel, Clavius. Sie führen die Entstehung des Bruches zurück auf Divisionsaufgaben, welche einen Rest lassen $46 : 7 = 6\frac{4}{7}$. Die Herleitung aus einem Ganzen war allgemein. Der doppelten Entstehungsart hätte auch eine zweifache Definition entsprechen müssen; doch nahm man darin nur Bezug auf die Teilung der Einheit: „Est autem numerus fractus, una pars vel plures partes alicuius totius in plures aequales partes divisi“ (Clavius).

Clavius hat in seiner Einleitung zur Bruchlehre alles das zusammengestellt, was zur Erledigung der Species nötig ist. Er behandelt: Die Wertveränderung eines Bruches durch Wachsen und Abnehmen des Zählers und Nenners, das Resolvieren, das Heben, das Gleichnamigmachen unter Benutzung des kleinsten Generalnenners, die Verwandlung unechter Brüche in gemischte Zahlen und umgekehrt.

Bezüglich des Kürzens stehen Grammateus und Ad. Riese auf sehr tiefer Stufe, gerade Zahlen werden so lange mit 2 gekürzt, bis sie ungerade sind, die ungeraden werden probiert mit 3, 5, 7, 11, 13 etc. Rudolff giebt (in Künstliche Rechnung) Kennzeichen für die Teiler 2, 3, 5 und 10, in der Coss aber für sämtliche Teiler von 2 bis 10. Wertlos ist das für die Zahl 7: „Durch 7 geht jede Zahl auff, die eine summa ist der geometrischen progrefs genannt dupla von drey oder sechs oder

neun oder zwölff steten." Beispiel $3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 = 189$. Beweis. Je drei aufeinanderfolgende Glieder einer solchen Progression lassen sich unter der Form $n(1 + 2 + 4)$ darstellen, welche wegen des zweiten Faktors durch 7 teilbar ist. — Stifel und Krafft (1592) führen ebenfalls die Kennzeichen für alle Teiler von 2 bis 10 vor. Als historische Merkwürdigkeit wollen wir von Krafft das Kennzeichen für 7 anführen.

Dividiert man die aufsteigenden Zehnerpotenzen ($10^0$, $10^1$, $10^2 \ldots$), also die Stellenwerte unsers Zahlensystems, durch 7, so erhält man die Reste 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1 . . ., welche Krafft „Instrumentzahlen" nennt. Nun ist klar, dafs wenn man von der vorgelegten Zahl jede Stelle gesondert durch 7 dividieren wollte, die zugehörige Instrumentzahl so oft als Rest bleiben würde, als die betreffende Stelle Einheiten hat. Man hat also die Instrumentzahlen mit den zugehörigen Ziffern zu multiplicieren und die Summe der Produkte auf ihre Teilbarkeit durch 7 zu untersuchen. Deshalb schreibt Krafft: „Setz die Instrumentzahlen gehörig unter die gegebene Zahl. Multiplicir sie mit den überstehenden Ziffern, wirf auf dem Produkt die Siebener aus und setze die Reste unter. Ist die Summe der Reste durch 7 teilbar, so ist es die vorgelegte Zahl."

Das mitgeteilte Kennzeichen läfst sich bis zu Ibn Albannâ (13. Jahrhundert, Marokko) zurückverfolgen.[1]) Dafs einfaches Probieren die Frage über die Teilbarkeit durch 7 schneller zur Entscheidung bringt, bedarf kaum der Erwähnung.

Die Rechenmeister lehrten immer nur je zwei Brüche auf einmal addieren; vereinigten sie mehr als zwei gleichzeitig (Stifel), so benutzten sie das Produkt aus allen Nennern als Generalnenner. Darum verdient es besondrer Erwähnung, wenn einige (Tartaglia, Clavius, Krafft) den kleinsten Generalnenner zu finden wissen, und es freut den Historiker umsomehr, wenn dies nach einer im Kopfe ausführbaren Methode geschieht. Diese besteht darin: dafs man zuerst den Generalnenner für die ersten zwei Brüche sucht, darnach den zu dem ebengefundenen und dem dritten Nenner, dann nimmt man den vierten Nenner hinzu etc. Bei den Nennern 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 steigt man durch die Zahlen 6, 12, 60, 120 zu 360 als Generalnenner auf. — In der Multiplikation unterschied man nicht selten mehrere Fälle, im Maximum fünf als die möglichen Kombinationen zweier der drei verschiedenartigen Faktoren (ganze, gebrochene, gemischte Zahl). Diejenigen Autoren, welche in der Division auf gleichnamige Brüche zurückgingen, behandelten die Multiplikation entweder an erster (Lucas) oder an vierter Stelle (Grammateus). Durch eine Erörterung über die Gröfse des Produkts, das bei zwei Brüchen stets kleiner als jeder Faktor

1) Cantor, Vorlesungen I, 689—692.

sei, was doch der Definition der Species zuwiderlaufe, wurden aufsteigende Zweifel zerstreut (Rudolff, Tartaglia, Clavius).

Ähnlich wie in der Multiplikation gewann man auch in der Division verschiedene Fälle und zwar neun. Auf dreifach verschiedenem Wege wurde der Quotient gefunden. 1) Wem es ohne jedwede Eröffnung des Verständnisses zu thun war, „multiplicirte ins Creutz“, wobei er sich in der Placierung der Produkte bezüglich der Quotientenbildung nach dem Dividenden richten mufste. 2) Andere gingen auf gleichnamige Brüche zurück und machten den Fortfall der Nenner mit dem Hinweis auf die Division zweier benannten Zahlen plausibel. 3) Stifel und Clavius wenden die praktische Umkehrungsregel an: „Ego Divisionis regulam reduco ad regulam Multiplicationis hoc modo: Divisoris terminos commuto“ etc. (Stifel).

Dafs die Vorstellung des Teilens nicht statthaben kann, wenn der Divisor ein Bruch ist, wird ebenfalls (Rudolff, Tartaglia, Stevin) berührt. Es sei absurd zu sagen: 4 durch $\frac{2}{5}$ zu teilen, hier könne nur der Ausdruck „messen“ Anwendung finden, nämlich: wie oft sind $\frac{2}{5}$ in 4 enthalten? (Tartaglia).

Didaktisch wertvoll sind die Inversionsaufgaben, welche man bei einigen Autoren (Tartaglia, Clavius) am Ende der Bruchlehre als Repetitionsexempel findet. Z. B.: Zu welcher Zahl wurden $4\frac{4}{9}$ addiert, wenn man $20\frac{1}{2}$ erhielt? Welche Zahl wurde durch $4\frac{1}{7}$ geteilt, wenn man $2\frac{1}{8}$ erhielt?

§ 49. **Regeldetri.** Die Regeldetri[1]) galt als die vornehmste unter allen Regeln, weil durch sie alle kaufmännischen Fragen aufgelöst werden. Man bezeichnete sie unter jeweils andrer Begründung mit folgenden Namen: Reguladetri, Kaufleutregel, clavis mercatorum, regula magistralis, regula aurea, die gulden Regel. „Vns habn̄ die meyster d' freynkunst vō d' zal ein regel gefundē die heist gulden regel Danō das sie so kospar vnd nucz ist. dan̄ alle ander regel zu gleicher weys als golt vbertrifft alle and' metall Sie wirdet auch genen̄et regula d'tre nach welischer zūgē als die sagt vō dreierlei vn̄ beschleust drei zall in ir. Sie hat auch vile ād̄er namē die las ich vō kurcz wegē an stan“ (Bamberger Rechenbuch 1483).

In der Behandlung der Regeldetriaufgaben tritt der Mechanismus jener Zeit in der allergröbsten Art zu Tage. „Setz hinden das du wissen wilt, das ihm am namen gleich setz forn vnd das ein ander Ding bedeut, setz mitten. Darnach multiplicir das hinden steht mit dem mittlern, was kompt, teile in das förder, so hastu berichtung der frag vnd am namen gleich dem mittlern wie hie“ (Ad. Riese). Eine ähnliche Regel enthält die Probe: „Verker die Regel, also das hinden gestanden ist setz forn, das facit

---

1) Über ihr Vorkommen bei den Indern vgl. Cantor, Vorlesungen I, 508 und 524.

mitten, vnd das forn gestanden hinden, machs alsdann nach gesetzter Regel, so mufs wider kommen, das vorhin mitten gestanden ist" (Ad. Riese).

Es war zwar vielen nicht unbekannt, dafs die Regeldetri aus der Proportion erwachsen ist, allein der Versuch der Herleitung jener aus dieser misglückte immer. Selbst der treffliche Clavius brachte Zahlen verschiedener Qualität in ein Verhältnis; er schreibt: 4 fl  12 ℔  20 fl ? statt: 4 fl : 20 fl = 12 ℔ : $x$ ℔.

Eine besondre Abteilung bildete immer die indirekte Regeldetri (regula conversa, regula eversa, regula inversa), bei welcher es freilich mit der Begründung des Ansatzes noch übler aussah als bei der direkten. Es wurden sofort Beispiele angezogen, sodafs der Schüler mehr instinktiv als durch Überlegung zur Unterscheidung direkter und indirekter Verhältnisse geführt wurde. „Wenn der Malter Frucht 12 Weifspfennig gilt, mufs der Bäcker 22 Lot Brot für 1 heller geben. Wieviel Lot Brot mufs er geben, wenn der Preis für den Malter auf 15 Pfennig gestiegen ist. Nach der Regeldetri kämen $27\frac{1}{2}$ Lot. Nun kann aber ein jeder Vernünftige einsehen, dafs der Bäcker nicht soviel Lot Brot geben kann, wenn das Korn im Kauff gestiegen ist. Darumb mustu die Frage vmbwenden vnd verkehrt in die Regeldetri ordnen vnd also in deinem sinn gedenken 15 Pf. geben 22 Lot, wieviel Lot geben 12 Pf. Nach solcher ordnung manigfaltig, theil vnd rechne diese frag: so kommen $17\frac{3}{5}$, vnd ist gemacht" (Köbel).

Bezüglich der zusammengesetzten Regeldetri (regula de quinque, regula de septem etc.) bemerkte Clavius, in solchen Aufgaben seien 3 Zahlen die wichtigeren und die übrigen nebensächlich und jenen im Ansatze anzuhängen. Die Aufgabe: „Für 12 Ctr 36 Meilen weit zu fahren, zahlt man 15 fl Fuhrlohn, wieviel für 20 Ctr 25 Meilen weit?" steht in der Regula de quinque:

$$\begin{matrix}12\\36\end{matrix} > 15 \text{ fl} < \begin{matrix}20\\25\end{matrix}$$

Solange alle Verhältnisse einer Aufgabe einerlei Art sind, so ist die Vorschrift des Clavius brauchbar; sobald aber direkte und indirekte Verhältnisse untermischt auftreten, nicht mehr; und in solchen Fällen ging Clavius auch die allgemeine Heerstrafse, derartige Aufgaben durch so viele Dreisätze zu lösen, als Verhältnisse vorhanden sind.

Die Regeldetri bildete die Lösungsform für die Aufgaben der angewandten Rechnungsarten, welche man unter den sonderbarsten Titeln vortrug, indem man als solche den Handelsartikel (Korn, Wein, Zimt, Leinwand, Käse etc.) oder ein Stichwort des Geschäftsvorfalles wählte (Knechtlohn, Münzschlag, Stich, Gewinn etc.). Nach und nach schwand der Wust von Titeln und Tartaglia trug schon die weiteren Stoffe unter den noch

heute üblichen Rubriken: Zins-, Sconto-, Termin-, Zinseszins-, Gesellschafts-, Wechsel- und Mischungsrechnung vor.

§ 50. **Terminrechnung.** Zur Bestimmung des mittleren Zahlungstermins von mehreren Posten dergestalt, dafs weder der Schuldner noch der Gläubiger Schaden leide, dienten zwei Wege. a) Zahlte der Schuldner alle Posten am Fälligkeitstermine des ersten, so würde er die Zinsen verlieren, welche er von den übrigen bis zu ihrem Verfalltage noch ziehen könnte. Nachdem nun die Gesamtsumme jener Zinsen ermittelt war, suchte man die Zeit, in welcher die Kapitalsumme die gleichen Zinsen abgeworfen hätte, woraus der mittlere Zahlungstermin folgte (Lucas de Burgo). b) Die zweite Methode geht zwar auch von derselben Erwägung aus, ist aber in der Ausführung kürzer, indem sie nur mit den „Zinsnummern" (Produkt aus Kapital mal Tagen) statt mit den Zinsen selbst operiert. Es ist dies das noch gegenwärtig übliche Verfahren, von Widmann und Tartaglia schon gelehrt.

§ 51. **Gesellschaftsregel.** Die hierher gehörigen Aufgaben löste man, abweichend von der gegenwärtigen Weise, durch so viele Dreisätze, als Teilhaber waren. Die Summe der Teilzahlen kam ins erste Glied, die zuteilende Summe ins zweite, die Anteile der einzelnen Teilhaber ins dritte. Man brachte die Teilzahlen nicht auf ihre kleinsten Werte und führte die Division auch nicht vor der Multiplikation aus. — Clavius hat in seinen 26 Gesellschaftsexempeln die verschiedensten praktischen Verhältnisse berührt. Auch die 17 Aufgaben im Bamberger Rechenbuche 1483 können als ebensoviele Musterbeispiele für Gruppen von Exempeln angesehen werden. — Nicht selten finden sich Gesellschaftsexempel vorzüglich in Testamenten mit Brüchen statt ganzer Teilzahlen, wobei aufser acht gelassen ist, dafs die Summe der Brüche gleich 1 ist (von 200 fl soll A die Hälfte, B das Drittel und C das Viertel erhalten). Tartaglia eifert gegen derartige Aufgaben, weil ihre Lösung nicht gemäfs den Bedingungen vollzogen werden kann. In solchen Fällen kann nicht realiter sondern nur proportionaliter geteilt werden, d. h. die Beträge müssen sich verhalten wie jene Brüche. Tartaglia hat recht. Wenn in Testamenten solche unausführbare Bestimmungen vorkommen, so mag das hingehen; wenn aber noch in Rechenbüchern derartige Aufgaben angetroffen werden, so verraten diese mindestens die Nachlässigkeit in der Einkleidung.

In der Lösung der Mischungsaufgaben herrschte dieselbe Abweichung von dem gegenwärtigen Verfahren wie in der Gesellschaftsrechnung; nach Aufstellung der Mischungszahlen kam auch hier eine Reihe von Dreisätzen zur Anwendung. — Mehrere Lösungen einer Aufgabe findet man häufig.

§ 52. **Zinseszinsrechnung.** Zinseszinsen zu nehmen war damals eine Handlung, nach dem Gesetze strafbar und vom Volke verachtet. Man meinte,

ler Gesetzgeber sei von der Erwägung ausgegangen, dafs derjenige, der nicht die einfachen Zinsen abzutragen fähig sei, erst recht nicht in der Lage sei, Zins von den schuldigen Zinsen zu geben. In deutschen Rechenbüchern gehören deshalb derartige Aufgaben zu den Seltenheiten, „vom Wucher" ist ihr anrüchiger Titel, ein Jude mufs den Gläubiger spielen.

Da man damals der Decimalbrüche und Logarithmen noch entbehrte und da überdies in den Münzsystemen die decimale Unterteilung nicht herrschte, so war die Berechnung eines durch Zinseszins angewachsenen Endkapitals ungemein mühsam. Die Italiener kannten mehrere Wege dazu, Tartaglia giebt deren vier an. Beispiel: 300 Duk. Kap., 10 %, 4 Jahre. a) Man berechnet das Endkapital fürs erste Jahr, daraus das fürs zweite etc. stets unter Anwendung des Dreisatzes. b) Der zweite Weg bedient sich der Formel $aq^n$, jedoch ohne Anführung derselben. c) Man kann die einjährige Vermehrung des jeweiligen Kapitals durch einen Bruch $\frac{p}{100}$ ausdrücken, und das Kapital fortschreitend von Jahr zu Jahr um diesen Bruchteil seines Betrages vermehren. d) Nach der vierten Methode wird das Anwachsen eines beliebig angenommenen Kapitals (Hundert) unter den gegebenen Bedingungen (Prozente und Zeit) ermittelt und die gefundene Summe mit dem Verhältnis des gegebenen Kapitals zum angenommenen multipliciert. Die letzte Methode enthält schon das Princip, welches der heutigen Berechnung mit Hilfe von Tabellen zu Grunde liegt.

Zur Umgehung des unbequemen gemeinen Bruchs rechnete Rudolff (vor Erfindung der Decimalbrüche) mit Decimalteilen; sein Beispiel: 375 fl, 5 %, 10 Jahre, sieht so aus:

| | | |
|---|---|---|
| 375 | fl | (Anfangskapital) |
| 18 | 75 | |
| 393 | 75 | Hauptgut und Gewinn des ersten Jahres |
| 19 | 6875 | |
| 413 | 4375 | andern |
| 20 | 671875 | |
| 434 | 109375 | dritten |
| : | | |
| 610 | 835 485 041 540 527 343 75 | |

Ohne Tabellen und Logarithmen kann die Rechnung nicht einfacher stattfinden.

Über die ältesten Interessetafeln sprechen wir § 57.

§ 53. **Wechselrechnung.** Die Entstehung der Wechselgeschäfte reicht hinauf bis zur Erfindung des Geldes. Sobald die Völker mit verschiedenem Gelde in Handelsbeziehung traten, machte sich die Wertvergleichung und Umrechnung der Münzwerte nötig. Die Wechsler schlugen ihre Wechsel-

bänke in grofsen Handelsstädten auf dem Markte auf. Jesus stiefs die Tische der Wechsler im Tempel um. Der direkte Umtausch verschiedener Münzen bildet den Anfang des gesamten Wechselhandels. Die Erfindung der Wechselbriefe wird den Juden zugeschrieben[1]), welche im 7. Jahrhundert aus Frankreich vertrieben wurden und sich in die Lombardei begaben. Die Italiener machten von den Wechselbriefen wegen ihrer Nützlichkeit gern Gebrauch. Die aus der Lombardei vertriebenen Ghibellinen brachten die Erfindung mit nach Amsterdam, von wo aus die Verbreitung über ganz Europa sich vollzog. 1246 soll schon bei einer Anleihe, welche Heinrich Raspe bei Frankfurter Kaufleuten machte, ein Trattengeschäft vorgekommen sein. 1315 erhielten die Hanseaten in Brabant das Privilegium zur Betreibung von Wechselgeschäften durch Johann Herzog von Lothringen. 1445 wurden die Wechselbriefe in Nürnberg eingeführt.[2])

Die Not schuf den Wechselbrief, Gründe der Zweckmäfsigkeit haben ihn erhalten; denn durch dieses bequeme Zahlungsmittel schwanden Mühe, Kosten und Gefahr, welche mit direkten Geldsendungen verbunden sind. Es konnten nun auch erst Zahlungen im Auslande unbehelligt gemacht werden, denn es gab Zeiten, in denen die Ausführung von einheimischer Münze aus dem Lande bei Strafe der Konfiskation verboten war.

In deutschen Rechenbüchern findet man wenig zur Wechselrechnung Gehöriges, nur Umrechnung verschiedener Münzen nach gegebenem Kurse. Ausführlich wird die Materie von den Italienern Lucas und Tartaglia behandelt. Erstrer teilt das älteste Wechselformular[3]) mit, bespricht vier Arten des Wechsels (1. cambio commune = Umtausch von Münzen, 2. cambio reale = Tratten und Rimessen, 3. cambio secco = trockener Wechsel, 4. cambio fittito = eine besondre Art des trockenen Wechsels, der zu mancherlei Betrug benutzt wurde) und markiert die wesentlichen Erfordernisse eines Wechselbriefs. Tartaglia handelt noch von weiteren Formalitäten: von der Beschaffung des Accepts, der Protesterhebung, der Anfertigung der Retoure.

Die Wechselrechnungen sind noch im ersten Entwickelungsstadium,

---

1) Ausführliches in Savary, Der vollkommene Handelmann 1676 S. 223.

2) Noback-Steger, Encyklopädie für Kaufleute S. 1252.

3) „1494 adi 9 Agosto in Venetia

Pagate per questa prima nostra a Lodouico de francesco da fabriano e compagni once cento doro napolitane insu [= in usu] la proxima fiera de Fuligni per la valuta daltretanti receuuti: qui dal Magnifico homo miser Donato da Legge: quondam Miser Priamo. e ponete per moi. Idio da mal ve guardi.

Vostro Paganino de paganini da Brescia. ℔ ℔

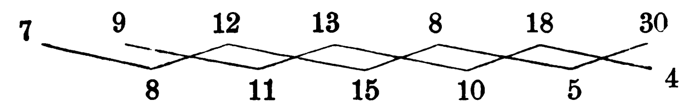
Domino Alphano de Alphanis e compagni in Peroscia.“

Lucas de Burgo, Summa Arithm. 1494 Bl. 167.

Arbitrage- und Wechselkommissionsrechnungen fehlen gänzlich, es handelt sich nur um Trassieren und Remittieren. Beispiele: „100 fiorini in Peroscia sind gleich 104 fiorini in Florenz. Wieviel ist für 45 fl. in Peroscia zu Florenz zu zahlen?“ — „Einer in Lyon trassirt per Nürnberg 1440 Kronen à Kreuzer $92\frac{7}{8}$ per 1 Krone. Ist die Frag, was in Nürnberg müsse dafür erlegt werden? Fac. 2229 fl.“

§ 54. **Kettensatz.** Die Regel, wie die Vergleichung zweier Gröſsen von verschiedener Einheit durch Mittelgröſsen erlangt wird, führt in ihrem letzten Ursprunge zu den Indern zurück; Brahmeguptas Arithmetik aus dem 7. Jahrhundert enthält bereits einen ähnlichen Ansatz. Die allmähliche Vervollkommnung geschah im 16. Jahrhundert, die Verbreitung und allgemeine Anwendung fällt ins 18. Jahrhundert, aus welcher Zeit auch der Name Kettensatz stammt. Vorher trug man diesen Ansatz unter dem Titel: „Vom Wechsel“ oder „Vergleichung von Mass und Gewicht“ vor; Joh. Widmann 1489 nennt ihn Regula pagamenti.

Aufgaben trifft man gewöhnlich nur eine. Widmanns Beispiel bezieht sich auf die Umrechnung von Münzen, doch bemerkt er, daſs man bei „Verwechselung von Mass und Gewicht“ in gleicher Weise verfahren könne. Das Rechnungsschema läſst die Multiplikatoren und Divisoren in gebrochener Linie erscheinen; die beiden Reihen sind wagerecht. Beispiel: „Eyner[1]) geet zu wyen yn eȳ wechſselpanck vnd hat 30 ₰ Nurm̄berger. alſso sprechen zu dem wechſseler liber wechſsel mir die 30 ₰ vñ gieb mir wiener darfür als vil sy dan wert seyn. also weyſs der wechſsler nit wie viel er ym wiener ſzol geben. vnd begert der muncz vnderrichtūg. also unterweyst genner de wechſsler vnd spricht 7 wyener gelten 9 linczer vnd 8 linczer geltñ 11 passawer vnd 12 passawer geltñ 13 vilſshofer vnd 15 vilſshofer gelten 10 regenſperger vnd 8 regenſperger geltñ 18 neumerker vñ 5 neumerker geltñ 4 nurmberger wie vil kummen wiener umb 30 nurmbr. Wiltu dz wissen vnd alles desgleichñ Secz die figur gleich wie die do steht.




Vñ multiplicir in kreucz durchauſs auff 2 teyl[2]) vñ dividir!

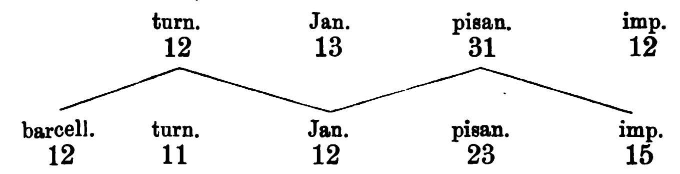
$$\frac{7\cdot 8\cdot 12\cdot 15\cdot 8\cdot 5\cdot 30}{9\cdot 11\cdot 13\cdot 10\cdot 18\cdot 4}=\frac{12096000}{926640}=13\frac{13}{429}$$

Alſso magstu auch deyn rechnūg seczen in gewicht vñ moſs gleicher weyſs wie in der muncz. yn aller landt art vnd kumpt albey recht.“

1) Widmann, Behēde Rechnung 1489 Bl. 152 ff.

2) Ein gleiches Schema geben: Apian 1527 und Obers, Newgestelt Rechenpüchlein 1545.

Die Art, die Zahlen eines Kettenexempels in zwei wagerechten Zeilen zu schreiben und dann im Zickzack zu multiplicieren, stammt aus Italien; man begegnet ihr schon im liber abbaci[1]) des Leonardo von Pisa 1202. Beispiel: „De baractis monetarum cum plures monete inter similes. Imperiales 12 ualent pisaninos 31, et soldus Januinorum ualet pisaninos 23, et soldus turnensium ualet Januinos 13, et soldus Barcellonensium ualet turnenses 11; queritur de imperialibus 15 quot barcellonenses ualeant" (1 Soldus = 12 danari).




Als Quelle des Kettensatzes wird von Ch. Rudolff 1526 die Regeldetri genannt, doch die Herleitung nicht gezeigt. „Aus vielfeltigem setzen und multipliciren bey der Regeldetri allhie wird vermerkt gar ein behender Auszug." Rudolff giebt eine deutliche Anleitung zur Bildung des Ansatzes und erwähnt auch schon die Vorteile des Kürzens. Sein Schema unterscheidet sich von dem heutigen nur dadurch, dafs darin das Gliederpaar mit der Frage zuletzt steht. Den Zusammenhang zwischen Kettensatz und Regeldetri setzt Apian 1527 vollständig klar auseinander.

Stifel 1544 schrieb sämtliche Zahlen eines Kettenexempels einschliefslich des gefragten Gliedes in eine einzige senkrechte Reihe und gewann die durch einander zu dividierenden Produkte dadurch, dafs er die an gerader Stelle stehenden Glieder für sich multiplicierte und ebenso die an ungerader Stelle stehenden. — Lucas de Burgo und Tartaglia schrieben alle Zahlen in eine wagerechte Reihe und verfuhren dann analog wie Stifel.

§ 55. **Die welsche Practic.** Die welsche Practic hat im 16. Jahrhundert eine ganz bedeutende Rolle gespielt und im 17. sogar den Glanz der goldnen Regel in Schatten gestellt, obgleich sie doch nur deren Magd war. Standen im zweiten und dritten Gliede einer Regeldetriaufgabe mehrsortige Zahlen, so umging man die Bildung gebrochener Faktoren und deren Multiplikation. Zur Ermittelung des Produkts jener beiden Glieder wurde der eine gebrochene Faktor (der garnicht als solcher dargestellt war, sondern in den niederen Sorten stehen blieb) in eine Reihe von Stammbrüchen zerlegt, wodurch das Produkt selbst in der Hauptsache durch einfache Divisionen und eine nachfolgende Addition zu finden war. Beispiel [1 fl = 30 ß à 18 ₰, 1 ℔ = 32 Lot] aus Ad. Riese:

1) Scritti di Leonardo Pisano I, 126—127.

```
5 5/6 ℔ kosten   32 fl   13 ngr   12 ₰   was 47 ℔ 15 Lot?
—————— 6                                         16 | 1/2 ℔
35                194 fl  22 ngr                  8 | 1/2
                 1358 fl      10 | 1/3 fl         1 | 1/8
                  776         10 | 1/3
                               2 | 1/6   aus 1/3
                   15 fl  20 ngr ┐
                   15 „   20  „  │ = 22 gr mal 47
                    3 „    4  „  ┘
                   97 „   11  „          ┐
                   48 „   20  „    9 ₰   │ = Preis für 25 Lot
                    6 „    2  „  10 1/8 „ ┘
                 ——————————————————————
                 9304 fl  18 ngr  1 1/8 ₰  Summa
             5)  1860 „   27  „  11 1/40 „
             7) ———————————————————————
                  265 fl  25 ngr  6 201/280 ₰
```

Der Rechnungsverlauf ist folgender: durch Erweiterung der ersten zwei Glieder mit 6 ist der Bruch aus dem ersten Gliede beseitigt; darauf ist 194 fl mal 47 berechnet, hierauf 22 ngr mal 47 mit der Zerstreuung des Geldes, darauf der Preis für 25 Lot mit der Zerstreuung des Gewichts. Die Summe ist successive durch 5 und 7 dividiert.

Je geschickter die Zerlegung in Summanden geschieht, desto einfacher gestaltet sich die Rechnung. Am einfachsten wird dieselbe, wenn jeder folgende Bruch ein Teil des zunächst vorhergehenden ist, weil dadurch die Dividenden stets kleiner und kleiner werden.

Erfunden wurde diese Art zu rechnen in Italien[1]) und kam durch Überlieferung der Kaufleute nach Deutschland, wiewohl Ad. Riese in nationaler Entrüstung gegen die vermeintliche Importierung protestiert. „Es haben andere es die welsche Praktik genannt. Man hat es aber auch vor viel 100 Jahren in deutschen landen gewist, wenn man ein Mafs wein umb 16 ₰ kaufft, das ein nössel umb das halbe gelt sol bezalt werden.“

In der welschen Practic unterrichten zu können, war kein kleiner Ruhm und ein diesbezüglicher Titelzusatz eines Rechenbuchs vermehrte den Absatz.

Bei den Vorteilen der Multiplikation blieb man nicht stehen, man suchte überall nach solchen; und so kam es, dafs man alle Abkürzungen der Rechnung und Abweichungen von dem allgemeinen Verfahren dem

1) „Praxis Italica Praxis illa quam ab Italis ad nos devolutam esse arbitramur, est ingeniosa quaedam inventio, quarti termini regulae de Tri, ex tribus terminis, mediante distractione varia eorundem terminorum, distractarumque particularum proportionatione, atque denominationum vulgarium translatione“ (Stifel, Arithm. int. 1544).

Kapitel der Practica einverleibte, sodafs schliefslich der Begriff welsche Practic die Gesamtheit aller Rechnungsvorteile umfafste. „Rechnung mit forteil vnd behendigkeit, die practica genannt“, Ad. Riese. Freilich lief dabei auch Spreu und leichte Ware mit unter, wovon die kuriosen Rechnungsmethoden spätrer Zeit Zeugnis geben.

Allgemeine Regeln[1]) zur Erlernung der Practic giebt's nicht, nur vielseitige Übung führt zur Meisterschaft. Die Autoren legten sich in der Ausrechnung von Musterbeispielen auch keine Beschränkung auf. Ad. Riese hat fol. 121 — 148 sämtliche Aufgaben nach der Practica vorgerechnet, Rudolff und Apian geben ebenfalls viele ausgeführte Exempel, Stifel (Arithm. int.) löst eine Aufgabe auf mehrfache Weise, von Wälckle (1536 Strafsburg) und Krafft (1592 Ulm) rühren selbständige Schriften der Practic her. Dafs auf diesem Gebiete die Italiener den ersten Platz behaupten, bedarf kaum der Erwähnung. Tartaglias Darstellung trägt ein systematisches Gepräge, indem für alle vorkommenden Mehrheiten der niederen Sorten (in Münzen, Mafs und Gewicht) die vorteilhaftesten Zerstreuungen tabellarisch zusammengestellt sind.

Wir schliefsen diesen Abschnitt mit einer Bemerkung Stifels (Deutsche Arithm. 1545 Bl. 15), welche nicht nur Trostworte enthält für diejenigen, welche die welsche Practic nicht verstehen, sondern zwischen den Zeilen auch ein kühles Urteil über die Leistungsfähigkeit dieser gerühmten Methode durchblicken läfst. „Die Wellisch Praktik ist nichts anders, denn eine künstliche vnd kurtzweilige erfindung mangfaltiger forteil bey der Regeldetri. Aber doch, wer die Welsch praktik nicht weist, der bleibe bey der einfeltigen Regeldetri, so findet er eben das, welches jener findet durch die Wellisch practicam.“

§ 56. **Tolletrechnung.** In vier Büchern haben wir diese eigentümliche Methode gefunden: Bamberger Rechenbuch 1483, Widmann 1489, Apian 1527, „Ein nützlich und künstlich Rechenbuch . . . Gebrl 1577“. — Die Aufgaben, welche nach diesem Verfahren gelöst wurden, sind Preisberechnungen einer mehrsortigen Vielheit aus dem gegebenen Einheitpreise (letztrer auch in mehreren Sorten gegeben). Zum Zwecke der Auflösung werden die kleineren Sorten nicht etwa reduciert, auch werden die grösseren nicht resolviert, ebensowenig kommt die welsche Praktik zur Anwendung, sondern man stellt für jede Aufgabe eine eigne Hilfstafel auf. In diese werden das Ein-, Zehn-, Hundert-, Tausendfache etc. des gegebenen Einheitpreises und ebenso die Preise für die Einheiten der

1) „Sie hat warlich der künstlichen geschwinden griff soviel, als nicht wol müglich, das man sie durch gewisse regeln herfür streichen, . . . mufs derhalben durch Exempel vnd täglichen brauch erlernt werden“ (Ch. Rudolff 1526).

kleineren Gewichte resp. Mafse aufgenommen. Die genannten Beträge sind nun mit den ihnen entsprechenden Ziffern der gegebenen Vielheit zu multiplicieren und die Produkte zu addieren. Schon im Bamberger Rechenbuche 1483 ist bemerkt, dafs die Regeldetri eine weit kürzere Methode sei. Widmann 1489 hat die Stelle über die Tolletrechnung wörtlich aus jenem Buche abgeschrieben; Apian arbeitete freier; Gehrl haben wir nicht gesehen. Beispiel: „Es hat eyner kaufft 4367 lb jngwer 29 lot 3 quent je 1 lb für 13 ß in golt, secz also

Hilfstafel:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | M | 650 fl | | 2600 fl |
| 3 | C | 65 fl | | 195 „ |
| 6 | X | 6 fl 10 ß | | 39 „ |
| 7 | lb | 13 ß | | 4 „ 11 ß |
| 2 | X | $\frac{130}{32}$ | $\frac{260}{32}$ ß | |
| 9 | lot | $\frac{13}{32}$ | $\frac{117}{32}$ ß | 12 ß 1 hell $\frac{1}{32}$ |
| 3 | quent | $\frac{13}{128}$ | $\frac{39}{128}$ ß | facit 2839 fl 3 ß 1 hell $\frac{1}{32}$. |

Apian führte aufser ähnlichen Preisberechnungen auch eine höchst komplicierte Rechnung über den Einkauf eines Silberbarrens mit Goldgehalt durch die Tolletrechnung aus. Die Aufgabe ist: „Es kauf einer ein stück Silber, wigt 82 Mark 14 Lot $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{16}$ $\frac{0}{32}$ $\frac{1}{64}$. Vnd helt die Mark an der Prob 1 lot $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{16}$ golt. Vnd ein Mark helt auch fein Silber 13 lot $\frac{2}{4}$ $\frac{1}{16}$. Kost 1 Mark fein Silber 8 fl 18 s. Vnd 1 Mark Gold 93 fl 10 s. Vnd man gibt von einer Mark schaiderlohn 8 s 10 heller. Ist diē frag, wie teuer etc.“ Auf die Wiedergabe der Lösung müssen wir verzichten, sie würde mehrere Druckseiten füllen. Erwähnt sei nur, dafs Apian sich dabei eines Bruchsystems bedient, dessen Nenner die Form $2^n$ haben, wodurch die Addition sich wesentlich vereinfacht.

Ein praktisches Verfahren ist die Tolletrechnung keineswegs, sie kürzt die Rechnung nicht ab, sondern macht sie unnötig weitläufig.

§ 57. **Tabellen.** Wenn man unter einer Tabelle eine Gesamtheit von ordnungsmäfsig zusammengestellten Resultaten versteht, um bei vorfallendem Gebrauch derselben ihrer erneuten Berechnung überhoben zu sein, so findet man nur geringe Spuren von den gegenwärtig so wichtigen Hilfsmitteln fürs praktische Rechnen. Die Logarithmen waren noch nicht erfunden, der Zinseszinserhebung standen die Landesgesetze entgegen, Rentenanstalten, Versicherungswesen und Statistik sind Schöpfungen späterer Zeit. Von den trigonometrischen und astronomischen Tabellen mufs hier abgesehen werden.

Die Einmaleinstafeln und Rechenknechte (= eine Zusammenstellung der ersten neun Produkte des Divisors) sind kaum als Tabellen zu betrachten; demnach bleiben nur die Preistabellen und Rabatttafeln übrig.

a) Preistabellen enthält der „Calculator[1]) von Otto 1579". Sie dienen zu Preisberechnungen für eine beliebige Mehrheit aus dem gegebenen Einheitpreise ohne Multiplikation, nur durch Addition. Die angenommene Wareneinheit ist 1 Ctr (doch kann selbstredend auch jede andre reale Einheit: Pfund, Elle, Stück etc. gesetzt werden). Auf der ersten Tabelle ist der Centnerpreis gleich 1 Pf. angenommen, ausgerechnet sind die Preise für die Quantitäten: $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ 1 2 3 ... 19 20 30 ... 100 200 ... 700 Ctr, desgleichen für $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ 1 2 ... 108 Pfund. Ebenso sind alle übrigen Tabellen eingerichtet; die Warenmehrheiten sind dieselben, nur der Preis für die Einheit steigt, verwendet sind die Werte: 1, 2 ... 11 ₰, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$ ... $20\frac{1}{2}$ gr, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, 1, 2 ... 70 fl. [1 fl = 21 gr à 12 ₰; 1 Ctr = 110 ℔.] Wollte man beispielsweise ausrechnen, wie teuer $3\frac{1}{2}$ Ctr 19 ℔ Baumwolle, der Centner zu $27\frac{1}{2}$ fl seien, so entnahm man der mit 27 fl überschriebenen Tabelle die Preise für 3 Ctr, $\frac{1}{2}$ Ctr und 19 ℔, desgleichen der mit $\frac{1}{2}$ fl überschriebenen Tabelle die Preise für dieselben Mengen und addierte die 6 Posten.

Ein Jahr später (1580) gab Isaac Riese ein Tabellenwerk: „Gerechnetes Rechenbuch"[2]) heraus, welches genau dieselbe Einrichtung hat wie Ottos Calculator. — Von geringerem Umfange sind die 116 Tabellen des Ad. Riese.[3]) Jeder Tabelle ist einer der folgenden Preise für die Einheit überschrieben 1 ₰, 2 ... 11 ₰, 1, 2 ... 20 gr, 1 fl, 1 fl 1 gr bis 5 fl; in der ersten Kolumne links stehen folgende Warenmehrheiten 1, 2 ... 9, 10, 20, 30, 40, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ ... $\frac{1}{4096}$, die übrigen Kolumnen enthalten die Beträge dazu. — Dasselbe Buch von Ad. Riese enthält auch die berühmte Annaberger Brotordnung. Sie besteht aus drei Tabellen, je eine für das „Halbgroschenbrot", das „Pfennigbrot" und für ein „Semmelpaar". Jede Tabelle hat drei Kolonnen: die erste (fürs Halbgroschenbrot) enthält die Kornpreise steigend von 20, 21 ... 84 gr; die zweite enthält das jedesmalige Gewicht eines Brotes fallend von 6 ℔ 9 Lot bis 1 ℔ 16 Lot; die dritte enthält die Anzahl der Brote, welche jedesmal aus einem Scheffel gebacken werden sollen steigend von 40, 42 bis 168 Stück. — Preistabellen für den Ein- und Verkauf von Wein hatte schon Köbel 1515 seinem Vysirbuche[4]) einverleibt.

---

1) Exemplar in Leipzig, Universitätsbibl.

2) Exemplar in Dresden, Königl. Bibl.

3) Ad. Riese, Ein Gerechnet Büchlein auff den Schöffel / Eimer vnd Pfundtgewicht ... 1536. Exemplar in Hamburg, Kommerzbibl.

4) Siehe § 21.

**b) Interessetafeln.** Die ältesten hat Stevin publiciert, wiewohl er sich die Erfindung nicht zuschreibt. Er besafs nur Uneigennützigkeit genug, diese praktischen von den holländischen Bankbeamten und Geldwechslern geheimgehaltenen Hilfsmittel bekannt zu machen; es geschah dies zuerst in flämischer und zwei Jahre später in französischer Sprache. Bevor Stevin den Gebrauch der Tafeln erklärt, löst er ein Beispiel nach der herkömmlichen Weise, um die Mühsamkeit der Rechnung zu zeigen. Beispiel: Es sind innerhalb 6 Jahre 324 L in gleichen jährlichen Raten (also 54 L am Ende jeden Jahres) zu zahlen; welches ist der Barwert bei 12% einfachem Rabatt auf 100? Antwort: $48\frac{3}{14} + 43\frac{17}{31} + 39\frac{12}{17} + 36\frac{18}{37} + 33\frac{3}{4} + 31\frac{17}{43} = 233\,\frac{2356847}{23476796}$ L.

Die Decimalbrüche hat Stevin — obwohl er deren Erfinder war — auf den Tafeln nicht benutzt, jedoch gewann er den Vorteil derselben dadurch, dafs er eine grofse dekadische Einheit, nämlich 10 Millionen, als Kapitaleinheit zu Grunde legte. Damit nun Aufgaben wie die obige durch eine einzige Operation lösbar sind, konstruierte Stevin ein „Täfelchen für einfachen Rabatt“. Die Zahlen 1 bis 8 sind Jahre, jede der übrigen ist gleich dem Barwerte einer $n$jährigen Rente von 10 Millionen, wenn 12% einfacher Rabatt gerechnet wird. Für den Gebrauch ist nur ein Dreisatz nötig, zu obigem Beispiele folgender: 60 Millionen sind gleich dem Barwerte 43 166 738, welchen Barwert haben 324 L? facit $233\,\frac{6023112}{60000000}$ L.

| | |
|---|---|
| 1. | 8 928 571 |
| 2. | 16 993 087 |
| 3. | 24 346 028 |
| 4. | 31 102 785 |
| 5. | 37 352 785 |
| 6. | 43 166 738 |
| 7. | 48 601 521 |
| 8. | 53 703 562 |

Für den doppelten Rabatt berechnete Stevin 16 Tafeln, „Interesse-Tafeln“ genannt, für 1 bis 16%. Jede hat drei Kolonnen, in der ersten stehen die Jahre (1 bis 30), die zweite enthält den Barwert eines nach $n$ Jahren zahlbaren Kapitals von 10 Mill. unter Berechnung von doppeltem Rabatt, die dritte den Barwert einer $n$jährigen Rente von jährlich 10 Millionen. — Die Konstruktion der zweiten Kolonne erfolgte nach der Formel $10\,000\,000 \cdot \left(\frac{100}{100+p}\right)^n$; die dritte wurde aus der zweiten durch Addition gewonnen, denn jedes $n$te Glied der dritten Kolonne ist gleich den $n$ ersten Gliedern der zweiten.

Stevins Interessetafeln sind eigentlich Rabatt-Tafeln, können aber auch wie Zinseszinstafeln gebraucht werden, welchen Gebrauch der Verfasser selbst schon zeigte. Beispiel: „On veut sçavoir combien montera le capital 380 L, avec son interest composé de 8 années, à raison de 11 pour cent par an.“ Man entnimmt der Tafel für 11% aus der zweiten Kolonne neben dem 8. Jahre die Zahl 4 334 266 und erhält mit Hilfe

des Dreisatzes: 4 334 266 L geben 10 Mill. L, wieviel geben 380 L das Resultat 875 $\frac{3142250}{4334266}$ L.

Will man die Tafeln benutzen, um das Endkapital zu berechnen, das entsteht, wenn jährlich dieselbe Summe auf Zinseszins angelegt wird, wie in folgendem Beispiele: „Quelcun doibt en 12 ans 5000 L, à sçavoir à chascun an le $\frac{1}{12}$ qui est 416 L 13 s 4 ₰. Combien vaudront elles toutes ensemble au bout de 12 ans; payant interest composé au denier 15 par an?“ so ist folgender Weg einzuschlagen. Man betrachtet 5000 L als eine 12jährige Rente, zahlbar in 12 gleichen Raten am Ende eines jeden Jahres, und berechnet nach der dritten Kolonne den Barwert derselben. Der Zinsfufs bedeutet $\frac{1}{15}$ des Kapitals; man findet neben dem 12. Jahre die Zahl 80 857 255 und setzt nun an: 120 Mill. haben einen Barwert von 80 857 255, welchen Barwert haben 5000 L? facit 3369 $\frac{6275}{120000}$ L. Hierauf läfst man diesen Barwert durch Zuschlag von Zinseszinsen 12 Jahre lang anwachsen; die dazu nötige Zahl 46 091 515 steht in der zweiten Kolonne; der Dreisatz: 46 091 515 wachsen zu 10 Mill., wie grofs werden 3369 $\frac{6275}{120000}$? liefert das Resultat 7308 $\frac{5024756}{5531418}$ L.

Da Lucas de Burgo 1494 (Bl. 174) schon von der Konstruktion der Interessetafeln spricht: „del modo a sapere componere le tauole de merito“, so dürfte die Erfindung dieser Tabellen den Italienern zuzusprechen sein.

§ 58. **Progressionen.** Das Progredieren galt für eine Species des praktischen Rechnens und fehlte zu Anfang des 16. Jahrhunderts selbst in dem kleinsten arithmetischen Schriftchen nicht, während es gegen das Ende jener Zeitperiode in den Hintergrund trat und im folgenden Jahrhundert ganz aus den praktischen Rechenbüchern verschwand. — Eine Definition versuchte Stifel in einem Zusatze zu Rudolffs Coss 1553: „Es ist aber Progressio ein ordnung viler zalen so nach einander aufsteygen oder absteygen nach eyner rechten richtigen regel.“ Die Einteilung in arithmetische und geometrische Progressionen hob man immer hervor, die Summationsregeln gab man in Worten; die für die arithmetische ist der wörtliche Ausdruck der Formel $s = \frac{(a+t)\,n}{2}$, die für die geometrische derjenige der Formel $s = \frac{t-a}{\varepsilon-1} + t$. — Clavius lehrte auch das letzte Glied ohne Kenntnis sämtlicher Zwischenglieder berechnen und erledigte damit ohne erhebliche Mühe die bekannte Schachbrettaufgabe $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots 2^{63}$ von 64 Gliedern. — Über das Vorkommen von Zahlenreihen bei den alten Kulturvölkern: den Ägyptern, Babyloniern, Indern, Arabern, Griechen sei auf Cantors Werk[1]) verwiesen.

1) Cantor, Vorlesungen I, 35, 72, 508, 655, 80.

**§ 59. Radicieren.** Das Radicieren war die letzte Species der gemeinen Rechenkunst. Fast in allen Rechenbüchern findet man die Ausziehung rationaler Quadrat- und Kubikwurzeln gelehrt, in besseren ist auch die Bestimmung irrationaler Wurzelwerte gezeigt. Der Quadratwurzelausziehung lag die Formel $a^2 + 2ab + b^2$ zu Grunde und Grammateus 1518 lehrte schon die kürzeste Form der Ausführung.

Näherungswerte irrationaler Quadratwurzeln bestimmte man nach verschiedenen Methoden. a) Man fügte dem Radikanden $2n$ Nullen bei, radicierte und dividierte die Wurzel durch diejenige Zehnerpotenz, welche $n$ Nullen besitzt. Adam Riese giebt im Oktavbuche 1522 eine Tafel mit den Quadratwurzeln der ersten 240 Zahlen genau bis auf Tausendteile, im Quartbuche 1550 eine solche mit den Wurzeln aus den ersten 206 Zahlen. b) Sind $x$ die Ganzen einer irrationalen Quadratwurzel $\sqrt{x^2 + r}$ und ist $r$ der Rest, so galt $x + \frac{r}{2x+1}$ als naher Wert (Stevin). c) Clavius hatte ein doppeltes Verfahren, wovon das eine immer nähere aber stets zu kleine, das andere immer nähere doch stets zu grofse Werte liefert.

Aufgabe: $\sqrt{x^2 + r}$ Zu kleine Werte:

$$x + \frac{r}{2x+1} = w_1 \quad \text{(erster Näherungswert).}$$

$$w_1 + \frac{x^2 + r - w^2}{x + 1 + w} = w_2 \quad \text{(zweiter Näherungswert).}$$

$$w_2 + \frac{x^2 + r - w_2^{\,2}}{x + 1 + w_2} = w_3 \quad \text{(dritter Näherungswert).}$$

Aufgabe: $\sqrt{x^2 + r}$ Zu grofse Werte:

$$x^2 + \frac{r}{2x} = w_1 \quad \text{(erster Näherungswert).}$$

$$w_1 + \frac{w_1^{\,2} - (x^2 + r)}{2w_1} = w_2 \quad \text{(zweiter Näherungswert).}$$

$$w_2^{\,2} + \frac{w_2^{\,2} - (x^2 + r)}{2w_2} = w_3 \quad \text{(dritter Näherungswert).}$$

Die Ausziehung der Kubikwurzel findet man der gröfseren Schwierigkeit und geringeren Anwendung wegen seltener. Die Berechnung beruht zwar auf dem Ausdrucke $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, jedoch herrscht in der Ausführung wegen verschiedener Anordnung der Hilfszahlen grofse Mannigfaltigkeit[1]), welche vorzuführen wir hier Abstand nehmen können. Zur Berechnung von Näherungswerten verwendete man $3n$ Nullen oder auch (Stevin) die Formel $\sqrt[3]{x^3 + r} = x + \frac{r}{3x(x+1)+1}$.

1) Vgl. Treutlein, Rechnen im 16. Jahrhundert S. 71 ff.

§ 60. **Regula virginum.** Durch die Regula virginum (auch reg potatorum, reg. Zekis, cekis, coecis, ceci, coeci) löste man im 16. Ja hundert unbestimmte lineare Gleichungen. Beispiel: „20 Personen, M ner, Frauen und Jungfrauen haben 20 ₰ vertrunken; ein Mann giebt 3 eine Frau 2 ₰, eine Jungfrau $\frac{1}{2}$ ₰, wieviel waren es von jedem ( schlecht?" Setzt man die Personen $= p$, die Summe $= s$, die Männ $= x$, die Frauen $= y$, und 3 ₰ $= a$, 2 ₰ $= b$, $\frac{1}{2}$ ₰ $= c$, so best folgende Gleichung

$$ax + by + c(p - x - y) = s, \text{ woraus folgt}$$
$$(a - c)x + (b - c)y = s - cp.$$

Die letzte Gleichung enthält den Lösungsweg. Man subtrahiert von d Geldsumme $s$ das Produkt aus der kleinsten Zahlung mal den Person $cp$ und zerlegt den Rest in zwei solche Summanden, daſs der eine dur die Differenz der gröſsten und kleinsten Zahlung $a - c$ und der and durch die Differenz der mittlern und kleinsten Zahlung $b - c$ teilbar i Sind viererlei Personen, so muſs der Rest $s - dp$ in drei Summand zerlegt werden, welche der Reihe nach durch $(a - d)$, $(b - d)$ u $(c - d)$ teilbar sein müssen. — Ohne jedwede Erklärung enthält die A weisung von Ad. Riese ein so überaus mechanisches Operieren, daſs ( Rechner wie ein Blinder zur Lösung geführt wird. „Setz links die P sonen, rechts die Summe und in die Mitte, was jeder gegeben hat.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Mann | 3 ₰ | 6 | | | | |
| 20 Pers. | Frau | 2 ₰ | 4 | 5<br>3 | 40 ₰ | $6 - 1 = 5$<br>$4 - 1 = 3$ | die teyler. |
| | Jungf. | $\frac{1}{2}$ ₰ | 1 | | | | |

Multiplicir das kleinste an Bezahlung mit der Zahl der Personen (20 · 1 = 20 ₰) vnd nimms von der vertrunkenen Summe (40 — 20 = 20 . Was da bleybet ist die zal, welche geteilt soll werden. Auch sollst wissen, daſs ein Teiler weniger ist, denn Geschlecht vorhanden. I Teiler mach also, nimm das geringste an Bezalung von den andern. Si zween Teiler, so mach aus der zal, welche sol geteilt werden, zween T also, daſs ein Teil gar mit dem gröſseren Teiler vnd der ander mit d kleinern Teiler mag aufgehoben werden. Alsdann summir vnd nimm v den Personen, so hast du die Zahl des dritten Geschlechts." — Da ( Zerlegung obigen Beispiels nur auf einerlei Art statthaben kann, so l die Aufgabe nur eine Lösung (1, 5, 14). Apians Darlegung stimmt ı der von Ad. Riese überein; Rudolff sagt, er löse solche Aufgaben dur Probieren, weil er die Regel bei mehr als dreierlei Personen zuwei unvollkommen befunden habe. Bei mehr als vier Personen kann die Z der Lösungen zuweilen erstaunlich groſs werden.

Gewöhnlich handelt es sich um eine Zeche und die Frage ist auf

Personen gestellt; doch kommen auch Einkäufe von Waren und Vieh vor. Bei Wareneinkäufen sind die einzelnen Waren mit ihren Preisen genannt, die Gesamtzahl der Pfunde und die ganze Einkaufssumme, gesucht wird das Gewicht jeder Ware. Ähnlich ist's beim Einkauf von Vieh, hier ist die Frage auf die Stückzahl jeder Tiergattung gestellt.

Die mancherlei Namen der Regel virginum haben ebensoviele Deutungen veranlafst. Regula potatorum heifse sie, weil sie von Trinkern handle; reg. virginum deshalb, weil meistens Jungfrauen unter den Zechern seien; reg. coeci darum, weil man die Lösung wie ein Blinder tastend suchen müsse, oder weil es wegen der mehreren zulässigen Lösungen nicht wahrscheinlich sei, dafs man diejenige Antwort treffe, welche der Proponent verlangt, es müsse denn blindlings geschehen. Noch andre suchen den Ursprung der Wörter coeci, ceci, cekis, Zekis in Zeche.

Hierher gehörige Aufgaben machten einen Bestandteil der Klostergelehrsamkeit[1]) im Mittelalter aus.

§ 61. **Die Regula falsi.** Die Regula falsi findet man in der Mehrzahl der arithmetischen Schriften[2]); sie ist bestimmt für solche, „so in der Coss nicht gegründet sind“, um durch sie bestimmte lineare Gleichungen aufzulösen. Weitergehende Anwendungen der Regula falsi kommen zwar auch, doch nur ausnahmsweise vor.

Mit Rücksicht auf Namen und Zweck definiert Apian: „Diese Regel wird von etlichen Regula positionum genannt. Vnd heifst nit darum falsi dafs sie falsch vnd vnrecht wehr, sunder, dafs sie aufs zweyen falschen vnd vnwahrhaftigen zalen, vnd zweyen lügen die wahrhaftige vnd begehrte zal finden lernt.“

Aufgabe aus Ad. Riese: „Gott grüfs euch Gesellen alle 30. Drauf antwortet Einer, wenn unser noch soviel und halb soviel wären, so wären unser 30.“ Behufs Lösung wählt man zwei beliebige Zahlen und vollzieht an ihnen die durch die Aufgabe vorgeschriebenen Operationen; erhält man bezüglich des vorgesetzten Resultats einen Überschufs, so wird dieser mit dem Pluszeichen angemerkt, ein Mangel mit dem Minuszeichen. Die beiden angenommenen Zahlen heifsen „Positionen“ oder „falsche Zahlen“, die Abweichungen aber „Fehler“ oder „Lügen“. „Alsdann nym — fährt Riese fort — ein Lügen von der andern (d. h. bei gleichen Vorzeichen), was do bleybet behalt für deinen teyler, multiplicir danach ym Kreutz eine falsche zal mit der andern lügen, nym eins vom andern, vnd das do bleybet teyl ab mit fürgemachten teyler, so kommt berichtung der frag. Leugt

1) Cantor, Vorlesungen I, 719.

2) Über ihr Vorkommen bei den Ägyptern, Indern und Arabern vgl. Cantor, Vorlesungen I, 36, 524, 628.

aber eine falsche zal zuviel, vnd die ander zu wenick (d. h. bei ungleichen Vorzeichen), so addir zusamen die zwo Lügen, was do kommt, ist dein teyler, danach multiplicir im Creutz, addir zusamen, vnd teyl ab, so geschieht Auflösung der frag. — Nimm (für obige Aufgabe) 16 vnd examinir die, $16 + 16 + 8 = 40$, das ist 10 zuviel, nimm 14, die leugt 5 zuviel, steht also:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | plus | 10 | 5 (teyler) |
| 14 | plus | 5 | |

14 mal $10 = 140$, 16 mal $5 = 80$, subtrahiert giebt 60, teyl ab durch 5 kommt 12, soviel seind der Gesellen gewesen." Der Wortlaut des vorstehenden Verfahrens rührt von Widmann[1]) 1489 her.

Mit algebraischen Zeichen läfst sich ein mathematischer Ausdruck für obige Regel entwickeln. Es sei $x$ die gesuchte Zahl, so genügt der Aufgabe die Gleichung 1) $ax = b$. Wählt man nun für $x$ die Werte $n$ und $m$, erfüllt jene Gleichung und nennt die Fehler $\delta$ und $\varepsilon$, so erhält man 2) $an = b - \delta$ und 3) $am = b - \varepsilon$. Durch Subtraktion der beiden letzten Gleichungen von der ersten ergeben sich 4) $a(x - n) = \delta$ und 5) $b(x - m) = \varepsilon$, aus denen die Proportion $(x - n) : (x - m) = \delta : \varepsilon$ folgt, deren Auflösung zu $x = \frac{\delta m - \varepsilon n}{\delta - \varepsilon}$ führt.

Abgehandelt wurde die Regula falsi in zwei Abteilungen unter den Titeln: Reg. falsi simplicis positionis und Reg. falsi duplicis positionis. In letzterer Abteilung unterschied man drei getrennte Fälle, je nachdem beide Fehler das positive, oder negative, oder verschiedene Vorzeichen hatten.

Würde man obiges Beispiel mit einer Position rechnen und 10 als solche wählen, so wäre 5 der Fehler und 25 das falsche Resultat; die Proportion $10 : 25 = x : 30$ liefert dann das richtige Resultat 12. Den mathematischen Ausdruck für diesen Lösungsweg gewinnt man wie folgt. Ist $x$ die gesuchte Zahl, $n$ die Position, $b$ das gegebene und $d$ das fehlerhafte Resultat, so hat man 1) $ax = b$ und 2) $an = d$, und folglich 3) $x : n = b : d$.

Einen Hinweis auf den Unterschied der Aufgaben, bei denen mit zwei Positionen operiert werden mufs und bei denen bereits eine genügt, findet man nirgends. Wahrscheinlich fehlte die Kenntnis davon. Die Scheidung der Aufgaben hat nach folgendem Umstande zu erfolgen: Enthält die Procedur nur Multiplikationen und Divisionen, so genügt das Operieren mit einer Position; ist aber die Reihe der Multiplikationen und Divisionen untermischt von Additionen und Subtraktionen, so mufs die doppelte Regula falsi angewendet werden.

---

1) Widmann, Behēde Rechnung 1489 Bl. 194—197.

Aufgaben für die Regula falsi trifft man oft in erheblicher Menge, bei Tartaglia 205 für eine Position. Bezüglich der Schwierigkeit herrscht grofse Verschiedenheit. Clavius löst nach der einfachen Regula falsi 14 Aufgaben; nach der doppelten über 20, unter denen sich vier Gleichungen mit zwei und drei Gleichungen mit drei Unbekannten finden. Hier ist eine solche Aufgabe: Zu suchen drei Zahlen, von denen die erste vermehrt um 73 gleich dem Duplum der beiden andern ist; und die zweite vermehrt um 73 gleich dem Triplum der beiden andern ist, und die dritte vermehrt um 73 gleich dem Vierfachen der beiden andern ist.

Wie man Gleichungen höherer Grade durch die Regula falsi lösen kann, lehrte zuerst Gemma-Frisius 1540 und nach ihm Stifel 1544. Gemma nimmt dies Verdienst für sich in Anspruch: „Et jam finem facerem, nisi in memoriam veniret promissionis de Regula falsi, qua ratione ea liceat uti in exemplis secundae, tertiae et quartae regulae quā vocāt Cos. quod ante nos nemo tentavit.“ Aufgabe aus Stifel (Arithm. int. 1544): Zu suchen zwei Zahlen, welche in dem Verhältnisse $1 : 1\frac{1}{2}$ stehen und deren Produkt gleich 864 ist; also $x : y = \frac{2}{3}$ und $xy = 864$. Zur Auflösung ist die Regula falsi zweimal anzuwenden:

I.

| | | |
|---|---|---|
| | 2 | 4 | |
| | 3 | 6 | |
| minus | 858 | 840 | minus |
| | 18 | | |

II.

| | |
|---|---|
| 10 368 | 576 |
| 23 328 | 1296 |
| 4 | 16 |
| 9 | 36 |
| 858 | 840 |
| 18 | |

Die beiden Positionen 2 und 4 des Schemas I können beliebig gewählt werden; im zweiten Schema sind aber dann die Quadrate jener Positionen als Positionen anzunehmen. Die Fehler des ersten Schemas behält man im zweiten bei. Es ergeben sich nun in gewöhnlicher Weise die Dividenden 10 368 und 23 328, der Divisor 18 und die Quotienten 576 und 1296, deren Quadratwurzeln 24 und 36 die verlangten Zahlen sind. — Sind drei Zahlen unter einander proportioniert und ist aufserdem ihr Produkt bekannt, so erfolgt die Lösung analog der vorigen; nur sind in das Schema II die Kuben der Positionen aus Schema I aufzunehmen und aus den Quotienten die Kubikwurzeln zu ziehen. — Stifel steigt bis zu fünf mit einander multiplicierten Zahlen auf; die Lösung erfordert dann die Ausziehung der fünften Wurzel.

Wir schliefsen diesen Paragraphen mit dem Urteile Stifels (Deutsche Arithm. 1545) über die Regula falsi: „Man erhebe die Falsi so hoch man wolle, man bessere sie auch oder mehre sie soweit vñ tieff man ymmer

könne, so bleibt sie doch gegen die Coss wie ein Punkt gegen einen Zirkel“ [= Kreis].

§ 62. **Die Decimalbrüche.** Die Erfindung der Decimalbrüche mufs Simon Stevin von Brügge (vergl. § 36) zugeschrieben werden, weil er die erste zusammenhängende Darstellung davon gegeben hat. Zerstreute Anwendungen von decimalen Bruchteilen kommen jedoch schon vor ihm vor.

In astronomischen Rechnungen waren von alters her die Sexagesimalbrüche herrschend. Peurbach bahnte den Übergang zu den Decimalteilen an, indem er in den trigonometrischen Tafeln den sinus totus gleich 600 000 setzte. Sein Schüler Regiomontan berechnete eine Sinustafel mit dem sinus totus 6 Millionen und eine mit dem sinus totus = 10 Millionen, wodurch die reine decimale Unterteilung erreicht war. Zu den Decimalbrüchen ging nach Keplers Zeugnis[1]) Jobst Bürgi[2]) über, welcher den Radius gleich 1 setzte und damit die Sinus als echte Brüche erhielt. Bürgis Sinustafel ist von 2″ zu 2″ berechnet und zwar bis auf 8 Decimalen. Bürgi schreibt 0.723 für 0,723 und $364_0 2$ für 364,2; das Decimalkomma führte Kepler ein.

Aufserhalb der astronomischen Rechnungen bediente man sich der Decimalteile zur Berechnung irrationaler Wurzelwerte.[3]) Grammateus benutzte sie zur Erkennung des Unterschiedes zweier gemeinen Brüche; z. B. $\frac{3}{4}$ und $\frac{7}{8}$; er setzte zwei Nullen an die Zähler und dividierte durch die Nenner und gewann 75 und $87\frac{1}{2}$ zur Vergleichung. „Und diese Regel — fährt er fort — dienet einen bruch von dem anderen ziehen.“ — Rudolff wendet Decimalteile bei der Zinseszinsrechnung[4]) an.

Simon Stevin hatte schon vor Bürgi den letzten Schritt zur Vollendung des decimalen Bruchsystems gethan, indem er das Gesetz des Stellenwertes auch jenseits der Einheit bis in infinitum fortsetzte. Sein kleines Schriftchen La disme 1585, das zuerst flämisch, dann französisch erschien, enthält eine vollständige Darlegung der Lehre von den Decimalbrüchen. Das Komma hat er noch nicht, die Zehntel, Hundertel etc. heifsen Primes, Secondes, Terces etc. und werden durch Indices kenntlich gemacht; er schreibt 8⓪ 9① 3② 2③ statt 8,932. Die Operationen führt Stevin ebenso wie wir aus. Er sah auch, dafs ein grofser Nutzen für das

```
Beisp. 0,000378 X 0,54.
          ④ ⑤ ⑥
          3  7  8
             5  4 ②
       ____________
       1  5  1  2
    1  8  9  0
    _______________
    2  0  4  1  2
    ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧
```

1) Gerhardt, Gesch. der Math. S. 78.

2) Burgi, Byrgius, Burgk, Borgen 1552—1632, Gehilfe an der Sternwarte in Kassel, dann Hofuhrmacher der Kaiser Rudolf II., Matthias und Ferdinand II. in Prag. Vgl. Gerhardt, Gesch. der Math. und Allgemeine deutsche Biographie, Artikel Burgi.

3) § 59.

4) § 52.

praktische Rechnen dann aus seiner Erfindung fliefsen würde, wenn überall decimale Währungszahlen herrschten, und legte demnach in seiner Schrift seine Ansicht über den grofsen Wert eines decimalen Münz-, Mafs- und Gewichtsystems nieder.

Stevins Schrift ist seinen Zeitgenossen nicht hinreichend bekannt geworden, sonst würde Kepler nicht seinem Mitarbeiter Bürgi die Erfindung der Decimalbrüche zugeschrieben haben.

Die Ausbreitung der Decimalbrüche in Deutschland nahm ihren Anfang mit dem Werke des Joh. Hartmann Beyer[1]) (1563—1625), welcher die Erfindung sogar für sich beansprucht; denn er bemerkt, es habe ihn, indem er sich zuweilen in den mathematischen Künsten erlustiret, die Praxis der Astronomen, geringere Teile als Grade mit 60teiligen Scrupeln zu messen, auf den Gedanken gebracht, dafs statt der sechzigteiligen Brüche, welche einen mühsamen Calculum erfordern, wol auch eine andre Denomination anwendbar, und dafs hierzu die 10 eine sonderlich bequeme und gleichsam privilegirte Zahl sei, welche im Addiren, Subtrahiren, vornehmlich aber im Multipliciren und Dividiren grofse bei keiner andern Zahl zu findende Vorteile gewähre. Beyer nennt die Bruchteile: erste, zweite, dritte etc. Zehnder, oder erste, zweite, dritte etc. Scrupul, oder Primen, Secunden, Terzen etc. und bezeichnet sie durch überschriebene Indices, nach den Ganzen setzt er einen Punkt. Er schreibt also $8 . 79\overset{v}{8}$ für 8,00798.

Aufnahme ins praktische Rechnen haben die Decimalbrüche mit Ausnahme der Zinseszinstafeln nicht gefunden, weil sie damals bei weitem nicht den Wert wie heute hatten. Wir können bei unserm decimalen Münz-, Mafs- und Gewichtsystem den Decimalbrüchen reale Bedeutung [0,25 *M* = 25 ₰; 6,224 kg = 6 kg 224 g] unterlegen, was früher nicht geschehen konnte. Es mufsten die Decimalbrüche der Resultate erst resolviert werden und infolgedessen nahm das ganze Bruchsystem nur einen untergeordneten Rang ein.

Dafs die Einführung decimaler Währungszahlen eine grofse Erleichterung in den praktischen Rechnungen schaffen würde, wurde mehrfach betont, zuerst von Stevin. Christian Schefsler sagt (Arithm. Hauptschlüssel 1692): „Das ist gewifs, wenn Alles nach decimaler Art abgeteilt wäre, dafs man sehr vorteilhaftig rechnen haben würde. Es wird aber nimmermehr geschehen, dafs in allen Sachen eine decimale Einteilung gemacht wird, ebensowenig als auf der ganzen Welt einerlei Sprache, Münz etc. einzuführen. Deshalb ist die Decimalbruchrechnung wohl in allen mathe-

1) Joh. H. Beyer, Logistica decimalis, das ist Kunstrechnung mit den zehnteiligen Brüchen . . . Frankfurt 1603 und später.

matischen Wissenschaften mit grofsem Vorteile zu gebrauchen, in der Praxis ist aber ihr Nutzen eben grofs nicht." Frankreich führte am Ende des 18. Jahrhunderts decimale Währungszahlen ein, Deutschland fogte erst in diesem Jahrhundert. Bis zu dieser Neuerung wurden die Decimalbrüche in den Rechenbüchern nur schüchtern bis garnicht vorgeführt; ja die Unkenntnis dieses Systems war in unserm Jahrhundert noch so grofs, dafs Stern (Lehrgang des Rechenunterrichts nach geistbildenden Grundsätzen 1832) die Decimalbrüche in gemeine umformte und sie dann nach den Regeln dieser erledigte. Nur in Tabellen[1]) über Münz-, Mafs- und Gewichtvergleichung verschiedener Länder fanden die Decimalbrüche Eingang.

§ 63. **Scherzexempel.** Die Scherzexempel (von Peurbach „Enigmata varia", von Rudolff „Schimpffrechnung" genannt) sind arithmetische Rätsel, deren Lösung auf einem verborgenen Kunstgriffe oder auf algebraischen Regeln beruht. Ihr Zweck war Übung des Scharfsinns, Zeitvertreib, Belustigung. Sie bilden gewöhnlich eine angenehme Zugabe der Rechenbücher. — Kenntnis davon läfst sich nur durch Vorführung der Stoffe gewinnen.

1) Ein Winzer[2]) mietet einen Arbeiter mit der Bedingung, ihm für jeden Tag an dem er arbeitet 10 ₰ zu zahlen, und für jeden Tag an dem er feiert 12 ₰ abzuziehen vom Lohne. Nach 40 Tagen sind sie quitt. Wieviel Tage hat jener gearbeitet und wieviel gefeiert? ($21\frac{9}{11}$ Tage, $18\frac{2}{11}$ Tage.)

2) Ein Turm[3]) steht $\frac{1}{4}$ im Erdreich, $\frac{1}{5}$ im Wasser und 100 Schuh in der Luft. Wie hoch ist er?

3) Ein Hund[4]) verfolgt einen Hasen, welcher 100 Sprünge voraus ist; wenn der Hase 12 Sprünge thut, macht der Hund 15. Wann hat dieser jenen ein?

4) Ein Fafs[5]) hat 3 Zapfen, durch den ersten läuft's leer in 2 Tagen, durch den zweiten in 3, durch den dritten in 4 Tagen. In welcher Zeit wird's leer, wenn alle drei geöffnet sind?

5) Ein Dieb stiehlt eine Summe Geld und mufs auf dem Rückwege drei Pförtner passieren. Der erste begehrt die Hälfte der gestohlenen Summe, giebt aber dem Diebe 100 fl zurück. Der zweite begehrt die

---

1) Clausberg, Licht und Recht der Kaufmannschaft 1724—1726. — Kruse, Hamburgischer Kontorist 1753. — Nelkenbrechers Taschenbuch 1762. — Gerhardt, Allgemeiner Contorist 1791.

2) Bamberger Rechenbuch 1483 Bl. 46.

3) Ebenda Bl. 52.

4) Ebenda Bl. 54. Vgl. Cantor, Vorlesungen I, 718.

5) Bamberger Rechenbuch 1483, Bl. 54. — Viele solche Aufgaben in Scritti di Leonardo 1202 I, 183 ff.

Hälfte des Restes und giebt 50 fl zurück; der dritte begehrt die Hälfte des neuen Restes und giebt 25 fl zurück. Wieviel stahl der Dieb? (Köbel.)

6) Eine Schnecke ist in einen 32 Ellen tiefen Brunnen gefallen; sie kriecht tags $4\frac{2}{3}$ Ellen aufwärts und nachts $3\frac{3}{4}$ Ellen abwärts. Wann kommt sie heraus? ($30\frac{27}{28}$ Tage.) Adam Riese, 1525.

7) Erraten einer gedachten Zahl. „Lafs zur Zahl ihre Hälfte zählen, entsteht ein Bruch, so mach ihn voll; lafs zur Summe deren Hälfte zählen, entsteht ein Bruch, so mach ihn voll; lafs durch 9 teilen und frage nach den Ganzen des Quotienten.“ Um zur gedachten Zahl zu kommen, setz 4 für jede Einheit des Quotienten, und 1 für den ersten und 2 für den zweiten Bruch (Köbel, Grammateus). — Erklärung. Ist $x$ die Unbekannte, so ist: $\left(x + \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$ der mathematische Ausdruck für den Gang der Rechnung. Die Summe ist $\frac{9x}{4} + \frac{5}{4}$, wobei jedesmal das Auftreten eines Bruches angenommen ist. Der zu $x$ gehörige Faktor $\frac{9}{4}$ bedingt die obige Division mit 9 und Multiplikation mit 4. — Ob und wann das Produkt wegen der auftretenden Brüche um eine, zwei oder drei Einheiten vermehrt werden mufs, ergiebt eine Betrachtung der allgemeinen Zahlformen: $4n$, $4n + 1$, $4n + 2$, $4n + 3$, unter denen jede gedachte Zahl dargestellt werden kann. Die Behandlung dieser Formen nach der Aufgabe giebt Aufschlufs über das Auftreten von Brüchen und demnach über die Addition von 1, 2 oder 3 Einheiten.

8) „Drei Personen trinken aus 3 Flaschen, zu erraten, aus welcher jeder trank.“ Lösung. „Mach eine Ordnung unter den Personen $A$, $B$, $C$; den Flaschen gieb die Zahlenwerte 1, 2, 3. $A$ multipliciere seinen Flaschenwert mit 2, $B$ den seinen mit 9, $C$ den seinen mit 10. Die Summe heifs von 60 subtrahieren und den Rest anzeigen. — Dividierst du nun den Rest durch 8, so zeigt der (ganze) Quotient die Flasche des $A$ und der Rest die Flasche des $B$ an“ (Rudolff). — Erklärung: Die Faktoren 2, 9, 10 sind konstant, die Flaschenwerte variabel und mögen $a$, $b$, $c$ sein. Dann erhält man $2a + 9b + 10c = s$ als Summe, wenn jeder seinen Flaschenwert mit dem ihm zukommenden Faktor multipliciert hat. Weil nun $a + b + c = 6$, so ist $10(a + b + c) = 60$, folglich $60 - s = 10(a + b + c) - (2a + 9b + 10c)$, das ist $60 - s = 8a - b$; die letzte Gleichung begründet das vorgeschriebene Verfahren.

9) Zwei kaufen 60 Fuchsbälge[1], je 5 Stück zu 2 fl, und verkaufen sie, auch wieder je 5 Stück für 2 fl und gewinnen 1 fl. Wie geht das zu? Lösung. Einkaufssumme 24 fl. Sie sortieren die Bälge in 30 gute und

---

1) Eine ganz ähnliche Aufgabe aus dem frühen Mittelalter bei Cantor, Vorlesungen I, 718.

30 geringe, von den guten verkaufen sie je 2 für 1 fl, von den geringen je 3 für 1 fl; folglich ist die Einnahme 15 fl + 10 fl = 25 fl.“ (Rudolff). — Der Nutzen kommt daher, dafs Verkaufspreis und Einkaufspreis nur scheinbar gleich sind. Beim Einkauf verhalten sich die guten zu den geringen Bälgen wie 2 : 3, während im Verkaufe gleichviel von jeder Sorte angenommen sind. Bei andrer Sortierung kann der Nutzen noch vergröfsert werden.

10) Der Ring.[1]) Unter einer Anzahl von Personen hat Einer einen Ring an einem Finger; zu erraten die Person, den Finger und das Glied. Zuerst bestimme man die erste Person und die Ordnung unter den Personen. Der Daumen der linken Hand sei der erste, der Kleinfinger der rechten Hand der sechste Finger, das Nagelglied das erste Glied. Heifs die Zahl der Person, welche den Finger hat, dupliren, addir 5, multiplicir mit 5, addir die Zahl des Fingers, woran der Ring steckt, multiplicir mit 10, addir die Zahl des Gliedes; frage nach der Summe, vermindere diese um 250. Ist der Rest eine dreistellige Zahl (742), so hat die siebente Person am zweiten Gliede des vierten Fingers den Ring. Ist die vorletzte Stelle eine Null, so steckt der Ring am zehnten Finger, z. B. 1201 = elfte Person, zehnter Finger, erstes Glied. Die Erklärung ist einfach.

11) Eine gedachte Zahl zu erraten[2]), welche kleiner als 105 ist. Man läfst die Zahl durch 3, 5, 7 dividieren und jedesmal den Rest nennen. Den Rest durch 3 gewonnen multipliciert man mit 70, den Rest durch 5 gewonnen mit 21, den Rest durch 7 gewonnen mit 15. Die 3 Produkte addiert man, zieht davon 105 ab so oft es geht, so ist der Rest die gedachte Zahl. (Köbel, Rudolff.)

Erklärung. Die drei Reste $r_3$, $r_5$, $r_7$ bilden eine gewisse Kombination dreier Zahlen (z. B. für 23 ist sie 2, 3, 2); jede der ersten 105 Zahlen hat eine ihr eigentümliche Kombination, von 106 an wiederholen sich die Kombinationen, desgleichen von 211 an, sodafs also 1, 106 und 211 dieselbe Kombination haben, desgleichen 2, 107 und 212 etc. Der Rechenkünstler stellt nun durch die Summe $70r_3 + 21r_5 + 15r_7$ eine Zahl $M$ her, welche dieselben Reste läfst als die gedachte Zahl $x$. Wird dann die Zahl $M$ um $n \cdot 105$ vermindert, so gewinnt man $x$ selbst. Dafs $M = 70r_3 + 21r_5 + 15r_7$ dieselben Reste läfst als $x$, kann schnell erwiesen werden. Seien diese Reste $\varrho_3$, $\varrho_5$ und $\varrho_7$, so ist klar, dafs $\varrho_3$ nur von $70r_3$ abhängt, weil $21r_5$ und $15r_7$ durch 3 teilbar sind; wird aber $70r_3$ durch 3 dividiert, so erhält man $r_3$ als Rest, folglich ist $\varrho_3 = r_3$. Des-

1) Dieselbe Aufgabe bei Leonardo Pisano 1202, I, 305.

2) Bekannt als die chinesische Erweiterungsregel, Zeitschrift f. Math. u. Phys. III.

gleichen ist $\varrho_5$ nur von $21 r_5$ abhängig, welches durch 5 dividiert den Rest $r_5$ läfst, folglich $\varrho_5 = r_5$. Ebenso[1]) ist $\varrho_7 = r_7$. Zusatz. Es lassen sich auch mit andern Divisoren ebensolche Regeln bilden. a) Für die Divisoren 2, 3, 5 sind 15, 10 und 6 die Hilfsfaktoren; 30 ist die Periodenzahl. Die gemerkte Zahl mufs kleiner als 30 sein. — b) Divisoren 2, 3, 7, Hilfsfaktoren 21, 28, 36, Periodenzahl 42. c) Divisoren 2, 5, 7, Hilfsfaktoren 35, 56, 50, Periodenzahl 70. d) Divisoren 2, 5, 9, Hilfsfaktoren 45, 36, 10, Periodenzahl 90 etc.

12) „Das Testament" ist eine Aufgabe aus der Gesellschaftsrechnung, welche mehrere Jahrhunderte in den deutschen Rechenbüchern eine Rolle spielte, zeugend von der Streitlust unsrer Altvordern. „Ein sterbender Vater hinterläfst ein schwanger Weib und bestimmt über die Erbteilung: gebiert sie einen Sohn, so erhält dieser 2 Teile und die Mutter 1 Teil; gebiert sie eine Tochter, so erhält diese 1 Teil und die Mutter 2 Teile." — Man läfst nun die Mutter Zwillinge (Apian), auch Drillinge (Rudolff) beiderlei Geschlechts gebären und verlangt die Ausführung des Testaments. Noch Clausberg[2]) eifert mit Spott und Humor gegen dieses alte Streitstückchen der Rechenmeister, welche die Verwickelung so weit trieben, dafs sie nicht nur 2 und 3 Kinder sondern sogar einen Hermaphroditen geboren werden liefsen. — Die Aufgabe hat ihre Quelle im römischen Erbrecht.[3])

§ 64. **Zauberquadrate.** In einigen arithmetischen Schriften des 16. Jahrhunderts (Adam Riese, Stifel, Ottos Calculator 1579, Remmelin, Lochner) findet man magische oder Zauberquadrate. Man versteht darunter eine derartige Anordnung von $n^2$ Zahlen einer arithmetischen Progression in ein quadratisches Zellennetz, dafs bei Summierung jeder Horizontal-, Vertikal- und Diagonalreihe dieselbe Summe resultiert. Zauberquadrate mit ungerader Zellenzahl sind leichter herzustellen als solche mit gerader Zellenzahl. Die Erfindung der Zauberquadrate weist zu den Arabern[4]) und Indern[5]) zurück, sie dienten dort zu Zaubereien. Anfangs hatten sie auch bei den christlichen Völkern einen mystischen und magischen Beigeschmack[6]), welcher jedoch nach und nach abgestreift wurde. Für Einzelne wurde der arithmetische Inhalt Stoff zu tieferen Studien[7]) (Stifel, Frenicle,

1) Zur Erklärung vgl. auch Zeitschrift f. Math. XIX, 270 ff. und ebenda XXVI hist. Abteil. S. 33 ff. Desgl. Zeitschrift f. math. Unterricht VII, 78 ff. Auch Cantor, Vorlesungen I, 586.

2) Clausberg, Demonstrative Rechenkunst 1772 S. 1332.

3) Cantor, Vorlesungen I, 476.

4) Günther, Vermischte Untersuchungen, Cap. Mag. Quadrate.

5) Cantor, Vorlesungen I, 539.

6) Doppelmayr S. 164.

7) Vgl. Günther a. a. O.

Poignard, De la Hire, Sauveur); für die Meisten blieben die ma; Quadrate jedoch nur eine arithmetische Spielerei.

Die indische Vorschrift zur Herstellung der magischen Quadra $(2n+1)^2$ Zellen ist folgende. „Nachdem das Quadrat in seine $(2n$ Zellen eingeteilt ist, setze m Zahl 1 in die mittlere Zel obersten Zeile und die Zahl die Zelle, welche bei der B nung durch doppelte Indice $\alpha_{2n+1,\ n+2}$ charakterisiert den müfste. Alsdann schreib die Zahlen in ihrer natü

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 39 | 48 | 1 | 10 | 19 | 28 |
| 38 | 47 | 7 | 9 | 18 | 27 | 29 |
| 46 | 6 | 8 | 17 | 26 | 35 | 37 |
| 5 | 14 | 16 | 25 | 34 | 36 | 45 |
| 13 | 15 | 24 | 33 | 42 | 44 | 4 |
| 21 | 23 | 32 | 41 | 43 | 3 | 12 |
| 22 | 31 | 40 | 49 | 2 | 11 | 20 |

Reihenfolge in diagonaler Richtung in die Zellen ein und zwar so, daf erfolgter Durchlaufung einer Nebendiagonale von $p$ Zellen die auf der Seite der Hauptdiagonale belegene Nebendiagonale von $(2n+1-p)$ an die Reihe kommt. Stöfst man hierbei auf eine schon besetzte Ze gehe man senkrecht eine Zelle herab und fahre in gleicher Weise f

Der Byzantiner Moschopulus gab ums Jahr 1400 in einem Tr über magische Quadrate zwei Regeln zur Füllung für ungerac Quadrate. a) Mit diagonaler F Man setze die 1 unter die m Zelle und die übrigen Zahlen i natürlichen Reihenfolge in dia Richtung in die leeren Plätze. man auf eine schon besetzte so gehe man in senkrechter Ri 2 Zellen herab.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 22 | 47 | 16 | 41 | 10 | 35 | 4 |
| 5 | 23 | 48 | 17 | 42 | 11 | 29 |
| 30 | 6 | 24 | 49 | 18 | 36 | 12 |
| 13 | 31 | 7 | 25 | 43 | 19 | 37 |
| 38 | 14 | 32 | 1 | 26 | 44 | 20 |
| 21 | 39 | 8 | 33 | 2 | 27 | 45 |
| 46 | 15 | 40 | 9 | 34 | 3 | 28 |

b) Füllung nach dem Springerzug. Man trage in die mittler der obersten Zeile die 1 ein und besetze die Plätze nach dem Sp zug. Stöfst man auf ein sch setztes Feld, so gehe man um 4 senkrecht herab. Ad. Rieses Vorschrift im Quartbuche (Bl. 102—105) zur Herstellu geradzelliger Zauberquadrate auf die erste Regel des Mosch Riese teilt ebenda auch die Sc

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 14 | 32 | 1 | 26 | 44 | 20 |
| 5 | 23 | 48 | 17 | 42 | 11 | 29 |
| 21 | 39 | 8 | 33 | 2 | 27 | 45 |
| 30 | 6 | 24 | 49 | 18 | 36 | 12 |
| 46 | 15 | 40 | 9 | 34 | 3 | 28 |
| 13 | 31 | 7 | 25 | 43 | 19 | 37 |
| 22 | 47 | 16 | 41 | 10 | 35 | 4 |

für $4^2$, $6^2$ und $8^2$ mit, doch ohne Anleitung, welche er im Okta

1) Günther a. a. O. S. 189.
2) Günther a. a. O. S. 195 ff.

1522 gegeben hat. Sie ist aber sehr dunkel: „Item zu setzen 1.2.3.. 16 in vier zeile das allenthalben 34 komen. Machs also setz nacheinander wie hie

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | Vorwechssel | 16 | 2 | 3 | 13 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | aufswendigk | 5 | 11 | 10 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | vñ inwendig | 9 | 7 | 6 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | stet also | 4 | 14 | 15 | 1 |

Vnd also mach nach diesem exempel andere dergleychen.“

Stifels (in Arithm. integra) Konstruktion der Zauberquadrate geschieht abweichend von den gegebenen Methoden. Er füllt jeden Umgang einzeln, von aufsen nach innen fortschreitend. Unterschieden werden die zwei Fälle $(2n + 1)^2$ und $(4m)^2$. Schemata giebt er bis zu $(16)^2$ Zellen. Wir verzichten auf die Wiedergabe und erwähnen nur noch von ihm, dafs er auch zwei Quadrate (9zellig und 16zellig) mit den Gliedern einer geometrischen Progression gefüllt hat. Darin liefern die Zahlen einer Reihe nicht gleiche Summen sondern gleiche Produkte. Die Herstellung ist einfach; man formiert erst aus den Exponenten (welche eine arithm. Progression bilden) ein magisches Quadrat und ersetzt dann die Exponenten durch ihre Potenzen.

§ 65. **Rückblick auf das 16. Jahrhundert.** Von einer Theorie des arithmetischen Unterrichts zeigt sich noch keine Spur, methodische Grundsätze kannte man noch nicht. Die Unterrichtsweise war rein dogmatisch und bestand, gleich der leiblichen Gymnastik, nur aus dem Vorthun und Nachthun. „Machs nach der Regel wie hie und kumpt recht“, drückt die ganze didaktische Weisheit der damaligen Rechenmeister aus.

Der Unterricht war Einzel-, nicht Massenunterricht. Jeder Schüler rechnete still für sich; war er fertig, so sagte er auf; stiefs er auf Hindernisse, so kam er fragen. Nur schriftlich wurde gerechnet, im Kopfe nicht.

Die Rechenbücher enthalten nur Regeln und Übungsbeispiele, Gründe und Beweise fehlen, sodafs höchstens Rechenfertigkeit ohne Verständnis des Verfahrens erreicht werden konnte.

Der materielle Nutzen, der Gewinn fürs praktische Leben, galt als alleiniges Unterrichtsziel. Der allgemeine Bildungsgewinn konnte auch wegen der mangelhaften Methode garnicht hervortreten.

Der Stoff war hinsichtlich des Umfangs, wenn auch nicht ganz, so doch im allgemeinen derselbe wie heute; Erweiterungen erfuhr er in der Folgezeit nur noch in den rein kaufmännischen Partien (Wechsel-, Zinseszins-, Rentenrechnung, Decimalbrüche, Logarithmen, Konto-Korrenten). — In Anbetracht des praktischen Bedürfnisses präsentiert er sich allerdings noch nicht in der gegenwärtigen Reinheit. Er ist vielmehr überladen mit

Resten griechischer und römischer Rechnungsweisen einerseits und mit algebraischen Partien andrerseits.

Die Gliederung des Stoffes, worauf die Methode besonders Gewicht legen mufs, läfst am meisten zu wünschen übrig. Das Zahlengebiet trat dem angehenden Rechner — klein oder grofs — auf einmal in seiner ganzen Unendlichkeit entgegen und hierauf wurde der gesamte Stoff an der Hand der Species in einem Zuge vorgeführt. Da gab es keine periodenweise Einführung in das Zahlengebiet, keine Abgrenzung für verschiedene Altersstufen, keine koncentrische Erweiterung der Operationen. Aus diesem Umstande erklären sich die ungünstigen Resultate des Rechenunterrichts im allgemeinen und bei jungen Schülern insbesondere. Wer Rechnen lernen wollte, mufste bereits Lesen und Schreiben können. Weder in der lateinischen noch der deutschen Schule konnte ordentlich Rechnen gelernt werden; wer ein fertiger Rechner werden wollte, mufste seine Ausbildung in der kaufmännischen Berufsschule, der Rechenschule, suchen. — Tüchtig rechnen können galt für keine leichte Sache, sondern für eine Kunst im vollsten Sinne des Worts.

In zweifach verschiedener Weise handhabte man die Rechenkunst, „auf Linien“ und „mit der Feder“, jenes als Nachklang des Abacusrechnens, dieses die indische Methode repräsentierend.

Die charakteristische Lösungsform für die angewandten Rechnungsarten war die Regeldetri, goldene Regel. Hinsichtlich der Prüfung des Resultats dominierte die Neunerprobe. Unter den Divisionsmethoden herrschte das unbequeme Überwärtsdividieren.

---

## Zweite Hälfte.

## Das 17. Jahrhundert.

In der Darlegung der eben beendeten ersten Hälfte dieser Periode mufste eine gröfsere Ausführlichkeit walten, als von jetzt ab stattfinden wird. Sie war geboten, einmal wegen der Eigenartigkeit jenes Zeitraums an sich und zweitens deshalb, um ein genaues Bild über Stoff und Methode unsres Gegenstandes in der Gründungsepoche des allgemeinen Schulwesens zu gewinnen als Basis für den weiteren Bau. In rascherem Tempo können und sollen nun die folgenden Jahrhunderte durchlaufen und nur diejenigen Erscheinungen herbeigezogen werden, welche neu und von Bedeutung sind.

§ 66. **Allgemeine Zustände.** Aufschwung auf allen Gebieten: in Wissenschaft, Schulwesen und Kunst, in Handel, Gewerbe und Industrie kennzeichnet das 16. Jahrhundert; Niedergang und Verwüstung leiten als

traurige Folgen des 30jährigen Krieges das 17. Jahrhundert ein. Ganze Gegenden waren verödet, Städte und Dörfer niedergebrannt, die Bewohner zur Hälfte durch Hunger, Seuche und Schwert dahingerafft, zur Hälfte verarmt, Handel und Gewerbe vernichtet, die Keime wissenschaftlicher Bildung erstickt. Auch die Anfänge des niederen Schulwesens, die der evangelische und konfessionelle Geist im 16. Jahrhundert geschaffen hatte, begrub der Kriegssturm in seiner Verwüstung. Die Lehrer waren den Trommeln der Werber gefolgt, das Geschlecht wuchs in Verwilderung auf. Kaum dafs die lateinischen Schulen ein kümmerliches Dasein fristen. Die Kirchenbehörden mufsten froh sein, wenn sie die kirchliche Ordnung notdürftig wieder herstellen konnten. Dazu kam, dafs der religiöse (evangelische) Geist gewichen und starre Orthodoxie eingezogen war.

Die Staatsregierungen hatten vollauf zu thun mit der Regelung der Landesverwaltung, um nur das bitterste Elend zu mildern; ans Schulwesen konnten sie nicht denken. Für Gelehrte hatte niemand Geld; selbst der Kaiser konnte seinen Hofmathematikus (Kepler[1]) 1612) nicht bezahlen, weshalb dieser ihn verliefs und seine Forderungen an den Kaiser auf dem Reichstage zu Regensburg 1630 geltend machen wollte.[2]) Wer dächte bei diesen traurigen Umständen nicht an Kästners Epigramm auf Kepler! „So hoch war noch kein Sterblicher gestiegen, als Kepler stieg, und starb in Hungersnot“ etc.

§ 67. **Schulwesen.** Weil überall die äufseren Mittel fehlten, so schweigt im 17. Jahrhundert die Schulgesetzgebung fast ganz; Schulordnungen fürs Volksschulwesen wurden von Staatsregierungen mit Ausnahme des Gothaer Schulmethodus nicht erlassen. In Preufsen geschah garnichts. In Kursachsen erschien nur 1673 von J. Georg II. ein „revidiertes synodales Dekret“[3]), welches befahl, keinen ungeprüften Küster anzustellen, vornehmlich solle er eine Probe im Schreiben und Buchstabieren schwerer Wörter ablegen. Württemberg setzte auf einer Synode 1649 die Schulpflichtigkeit der Kinder fürs sechste Jahr fest und befahl: die Schulen mit tauglichen Schulmeistern zu besetzen, diesen gebührenden Unterhalt zu geben und den Eltern bei Strafe einzuschärfen, ihre Kinder zur Schule zu schicken. Das ist alles, was in den grofsen Ländern geschah. Und was nützte das, da die Hauptbedingungen, Seminare und hinreichende Besoldung der Lehrer, fehlten. Wo sollten taugliche Lehrkräfte ohne Seminare herkommen, und wer sollte einen Beruf erwählen, in dessen Ausübung er beständig zu darben hatte! Ein besserer Lehrstand

---

1) Vgl. über Kepler Allgem. deutsche Biographie XV, 603–624.

2) Gerhardt, Gesch. d. Math.

3) Heppe, Geschichte d. Volksschulw. I, 177.

wurde erst Schritt für Schritt mit der Verbesserung der äufseren La; gewonnen.

Die niederen Lehrer waren meist unwissend und ungeschickt, mi unter auch roh und verachtet. In einem Visitationsberichte[1]) aus Hesse sagt Superintendent Hütterodt, „man habe Lehrer, welche docieren sollte was sie selbst nicht gelernt hätten". Nr. 12 der Erinnerungspunkte fü Gothaer Lehrer heifst: „Viel Schulmeister sollen sich im Rechnen besse üben, als bis anhero geschehen, denn sonsten sie der Bestimmung ir Schulmethodo vom Rechnen nimmermehr nachkommen können."[2]) Übe Tauglichkeit, Amtsführung und Einkommen der Lehrer hat Mone ein grofse Anzahl urkundlicher Nachrichten aus Baden veröffentlicht[3]), welch durchgängig unerfreulich sind.

Wenn auch die Staatsregierungen zur Hebung des Volksschulwesen nichts thun konnten, so haben doch die Städte wenigstens ihre lateinische Schulen gefördert. Beweis dafür sind die vielen im 17. Jahrhundert er lassenen oder erneuerten Gymnasialordnungen. Vormbaum hat ir II. Bande circa 50 Schulordnungen zusammengestellt, von denen sich di meisten auf Gymnasien beziehen. — Wenn auch Preufsen für die Volks schulen garnichts that, so hat Friedrich I. sich doch um die Hebung de höheren Schulwesens redlich bemüht; er stiftete die Universität Halle, zo Leibniz in seine Umgebung, gründete die Akademie der Wissenschaften i Berlin, die Friedrichsschule in Frankfurt a. O., das Collegium Fridricianu in Königsberg, das Gymnasium illustre Fridricianum in Halle, verlieh de Paedagogium regium daselbst ein Privilegium. An den Lehrern der latein schen Schulen waren auch Mängel aller Art zu rügen, vornehmlich (nac der Landgräflich hessischen Schulordnung[4]) 1618) anstöfsiger Lebens wandel, methodisches und erzieherisches Ungeschick. Die erforderliche Eigenschaften eines Lehrers wurden dahin angegeben, er solle gottes fürchtig und gelehrt, tüchtig andre zu lehren, fleifsig und arbeitsam, au richtig und treu, angesehen, ohne Begierden und unparteiisch, nicl mürrisch und zu hart, nicht zu gelinde und liebkosend, sparsam, mäfsi; nüchtern und tugendhaft sein und seine Stunden aufs genaueste halten.

Die Rechenschulen bestanden im 17. Jahrhundert fort in de gröfseren Städten und waren die besseren Schulen fürs gemeine Voll weil die Rechenmeister[5]) infolge ihres Zunftzwanges die tauglichsten un

1) Vormbaum II, 448.

2) Ebenda II.

3) Mone, Zeitschrift f. Gesch. d. Oberrheins 1851, II, 181 ff.

4) Vormbaum II, 189.

5) Rechenmeister waren (nach Büchertiteln): Christ. Müller 1603 in Berli Gebhard Overheyde 1638 in Braunschweig, Joachim Siegmann 1669 in Budissi Joh. Georg Haken 1670 in Zittau, Georg Wendler 1698 in Regensburg.

ehrsamsten Schulmeister waren. Und wenn ihnen das Patent fürs Lehramt auch nicht von einer staatlichen Unterrichtsbehörde ausgestellt wurde, so mufsten sie doch, um zünftig zu sein, ihre Lehrzeit treulich aushalten und vor verordneter Innungsprüfungskommission ein Examen bestehen. Auch eine Art Probe[1]) erforderte hie und da der Stadtrat von dem anzustellenden Rechenmeister.

Auch Winkelschulen, die Konkurrenzanstalten der Rechenschulen, waren an vielen Orten vorhanden. Ihr Lehrpersonal hat aber nach der Schilderung[2]) des privilegierten Berliner Rechenmeisters Christian Müller (1603—1640) den Titel „Schulmeister“ nur geschändet. Die Verbote der Winkelschulen seitens der Behörden werden aus diesem Umstande erklärlich.

Kann demnach in diesem Jahrhunderte von der Schulorganisation und dem Lehrstande im allgemeinen nur Unerfreuliches berichtet werden, so erregt das rüstige und erfolgreiche Schaffen[3]) des Herzogs Ernst von Gotha umsomehr unsre Bewunderung. Noch während der Kriegsunruhen begann er seine segensreiche Thätigkeit mit der Berufung des Schleussinger Rektors Reyher († 1673) zum Rektor des Gymnasiums nach Gotha 1640. In Reyher hatte der fromme Fürst denjenigen Schulmann gefunden, der ihm bei seinen weitgehenden Plänen die wesentlichsten Dienste leistete. 1641 wurde eine (fünfjährige) Generalvisitation über Kirchen und Schulen veranstaltet, deren Resultat unglaublich traurig ausfiel, die meisten Erwachsenen wufsten nichts mehr von den Hauptstücken des Katechismus. Daraufhin erschien 1642 eine neue Schulordnung für Gotha unter dem Titel: „Special- und sonderbahrer Bericht[4]) / Wie . . die Knaben und Mägdlein . . vnterrichtet werden können und sollen.“ Erst die späteren erweiterten Ausgaben 1648, 53, 62, 72 und 85 heifsen Schulmethodus. Uns interessieren daraus die Bestimmungen über den Rechenunterricht. Es gab drei Klassen, und man trieb in der mittleren: „Numerieren und wenn möglich auch Addieren und Subtrahieren und das Einmaleins“, in der oberen: „Regeldetri und wenn möglich Bruchlehre.“ — Neben der Schulordnung liefs Ernst der Fromme durch den Rektor Reyher eine Anzahl

1) In Güstrow, vgl. Vormbaum II, 605.

2) „Als Zitterschläger und Lediggänger, auch Tauben-, Fisch- und Vogelfänger, verdorben Lantzknecht, Butterhöcker und lahme Plintzen- und Kuchenbäcker und dergleichen Geschmeifs. Wann einer kaum die allgemeinen Species und Regeldetri recht gelernt und nach ½ Jahr aus der Schule gewischt und keinem Herrn dienen und gut thun wollen, und wenn er weder hinter sich noch vor sich kann und sich redlich zu ernähren weifs: alsdann fängt er an Winkelschul zu halten.“ Aus Ch. Müller, Rechenbuch 1603, Vorrede.

3) Heppe, Volksschulw. II, 207 u. Vormbaum II, 295.

4) Neu herausgegeben: Müller, Sammlung päd. Schriften Nr. 10.

neuer Schulbücher: ABC und Syllabierbüchlein, Lesebüchlein, Leseübung, Psalterium, Evangelienbüchlein, Rechenbüchlein (1653) ausarbeiten, deren Einführung in den Schulen des Herzogtums Gotha durch fürstlichen Befehl angeordnet war.

Auch Lehrerbildungsanstalten mit Staatsbeihilfe faſste Ernst der Fromme ins Auge, muſste aber von ihrer Errichtung wegen Abgangs äuſserer Mittel abstehen; jedoch versäumte er nicht, die Verwirklichung dieser Idee seinen Nachfolgern durch sein Testament[1]) 1675 ans Herz zu legen.

Noch vor Ablauf des Jahrhunderts verlieh Friedrich II. von Gotha durch die Gründung der zehn „Seminaria scholastica[2]) anno 1698“, der ersten deutschen Lehrerseminarien, dem Gedanken Ernsts Gestalt und Leben. Doch folgte bald nach ihrer Entstehung auch ihre Auflösung wegen — Mangel an Beihilfe.

§ 68. **Arithmetische Anforderungen in den Lehrplänen.** Abgesehen von geringen Erweiterungen, sind die Lehrpläne in der Hauptsache nur Erneuerungen der Lehrordnungen des vorigen Jahrhunderts. Die arithmetischen Anforderungen kehren darin unverändert wieder; über die Regeldetri und die Brüche geht man in den niederen Schulen nicht hinaus, in den lateinischen fordert man nur wenig mehr. Wollte man von einem Fortschritte reden, so müſste man die Aufnahme des Rechnens unter die Unterrichtsgegenstände der deutschen Schule einerseits und die Verlegung des Anfangs des Rechnens in ein früheres Alter auf den lateinischen Schulen andrerseits anführen. Wir nehmen die Bestimmungen über das Rechnen aus einigen Schulordnungen hier auf.

a) Für niedere Schulen. Weimarische Schulordnung 1619: „Es soll auch den Knaben, wenn sie etwas lesen und schreiben können, ein wenig von der Rechenkunst gewiesen werden, daſs sie die Ziffern und Zahlen kennen lernen, und nur das leichteste vom Addiren, Subtrahiren und Multipliciren verstehen und brauchen mögen.“[3]) — Schulmethodus Gotha 1648: „Das Rechnen ist in der Mittelklasse soweit anzufahen, daſs ihnen die Zahlen nebst dem Einmaleins beigebracht, und wenn es weiter zu bringen zum Addiren und Subtrahiren geschritten werde. Das Einmaleins soll aus dem Lesebüchlein, da es am Ende zu befinden, in der Rechenstunde durch vielfältiges Herumlesen auswendig gelernt werden. — In der Oberklasse wird das Rechnen durch die vier Species nach Anweisung des Rechenbüchleins (von Reyher) fortgetrieben, hernach die Reguladetri und endlich, wenn es soweit gebracht werden kann, die Brüche vorgenommen,

1) Schmidt, Encyklopädie X, 50.
2) Ebenda S. 50.
3) Vormbaum II, 239.

und wie nun der Präceptor ein Kind nach dem andern eine Probe an der Tafel thun läfst, also soll er ihnen auch mündlich durch allerhand Exempel den Grund recht beibringen."[1])

b) Für Gymnasien. Kurpfälzische Schulordnung für fünfklassige Gymnasien 1615: „Tertiani discant Numerationem, Additionem, Subtractionem. Secundani addant superioribus Multiplicationem, Divisionem et Regulam de Tri. Primani cum his omnibus Fractionum initia, prout ea in libello Arithmetico sunt exposita, conjungant."[2]) — Landgräflich hessische Schulordnung für sechsklassige Gymnasien 1656: „Die Inferiores (Quartaner) sollen in der Arithmetik das einmalein vnd die zahl lernen vnd schreiben, die mitteln die 4 species gantz fertig, die superiores aber auch die doctrinam de numeris fractis vnd proportionibus wohl fassen vnd vben."[3]) Güstrower Gymnasialordnung 1662: „Sexta: Diese fangen an, von dem Einmaleins, soviel ihr captus zuläfst zu lernen. Quinta: Etwas mehr vom Einmaleins. Quarta: Von der Arithmetica etwas mehr. Tertia: Arithmetica geht auf mehr species. Secunda: Die Arithmetica wird höher. Prima: Mathematica und Chronologica."[4])

§ 69. **Stoff und Methode im allgemeinen.** Die Abfassung der Rechenbücher war ausschliefslich Geschäft der Rechenmeister geworden. Adam Riese übte auch in diesem Jahrhundert seine Herrschaft noch aus, bis 1650 wurden Neuauflagen seiner Bücher veranstaltet. Christian Müllers Arithmetik (aufgelegt von 1603—1638) und Wendlers Arithmetica practica 1698 sind nur gekürzte Kopien des Ad. Riese. Reyher 1653 behandelt den ganzen Stoff vom Numerieren bis zur Ausziehung der Kubikwurzel wie im Fluge, das Aufgabenmaterial ist das denkbar leichteste; einen Gymnasialrektor würde man in dem Verfasser nicht vermuten. Und Reyhers Buch wurde 1714 zum 16. Male aufgelegt.

Besondre Hervorhebung verdienen die Erfindung der Logarithmen und der abgekürzten Multiplikation, die Erweiterung der Wechselrechnung und die richtige Grundlage der Rentenrechnung durch Leibniz.

Den Unterricht suchte man vornehmlich angenehm und leicht zu machen; diesen methodischen Bestrebungen verdankt man die „mathematischen Erquickstunden" (siehe § 71) und eine Menge „Rechenmaschinen" (siehe § 70).

In den Büchertiteln[5]) findet grofse Mannigfaltigkeit statt, nur die wenigsten Verfasser wählten eine kurze Bezeichnung wie: Rechenbuch oder

1) Vormbaum II, 308.
2) Ebenda S. 162.
3) Ebenda S. 465.
4) Ebenda S. 593.
5 Vgl. Murhard, Litt. der math. Wiss. I.

Arithmetica. Gewöhnlich ist der Titel lang und marktschreierisch[1]) und täuscht über den Inhalt. Mitunter klingt er seltsam und ergötzlich.[2]) Einige wählten nach Faulhabers Vorgange: Arithmetischer Wegweiser.

Die Verfasser widmeten nach allgemein üblicher Sitte damaliger Zeit ihre Bücher dem Landesfürsten oder einem einflufsreichen Ratsherrn. Die Widmungen haben durchgängig wegen der sehr kriecherischen Form einen widerlichen Beigeschmack; sie schliefsen ausnahmslos mit der Bitte um Schutz gegen die „Lästerer“ (Kritiker), welche von einer Sache redeten, die sie weder verstünden noch besser machen könnten.

§ 70. **Rechenmaschinen.**[3]) Einige suchten ihre Schüler von der Plage zu erlösen, die ihnen das Lernen des Einmaleins verursachte, und ersannen Hilfsmittel, von denen die bei vorfallenden Multiplikationen, Divisionen, Wurzelausziehungen etc. nötigen Produkte abgelesen werden konnten. Andere konstruierten Maschinen, auf denen durch einfache Kurbeldrehungen die Ausführung der Species bewirkt wurde.

a) Unter den Hilfsmitteln ersterer Art stehen obenan die Neperschen Rechenstäbe[4]), erfunden von Joh. Napier (Napeir, Neper, 1550—1618) Baron von Merchiston in Schottland und beschrieben in dem Werkchen: Rhabdologiae seu numerationis per virgulas libri duo cum appendice de expeditissimo Multiplicationis promptuario 1617.

Nepers Stäbe sind vierkantige Säulchen und tragen auf jeder Seite das kleine Einmaleins einer der ersten 9 Zahlen; die Reduktionsstäbe tragen die ersten 9 Produkte der Reduktionszahlen; auf den Wurzelstäben stehen die Quadrate und Kuben der ersten 9 Zahlen. Der Stab mit den ersten 9 Zahlen heifst Index und wird überall gebraucht.

Anwendung der Neperschen Stäbe. Soll beispielsweise $4097 \times 753$ berechnet werden, so legt man die vier Stäbe mit den Kopfzahlen 4, 0, 9, 7 in dieser Reihenfolge aneinander, den Index davor und kann nun aus den durch den Index angezeigten Horizontalreihen (hier der dritten, fünften und siebenten) die Partialprodukte ablesen, wenn man dabei die beiden zusammengehörigen Ziffern vereinigt. — Soll $2\,546\,208 : 5894$ berechnet werden, so schreibt man den Dividend auf und legt diejenigen

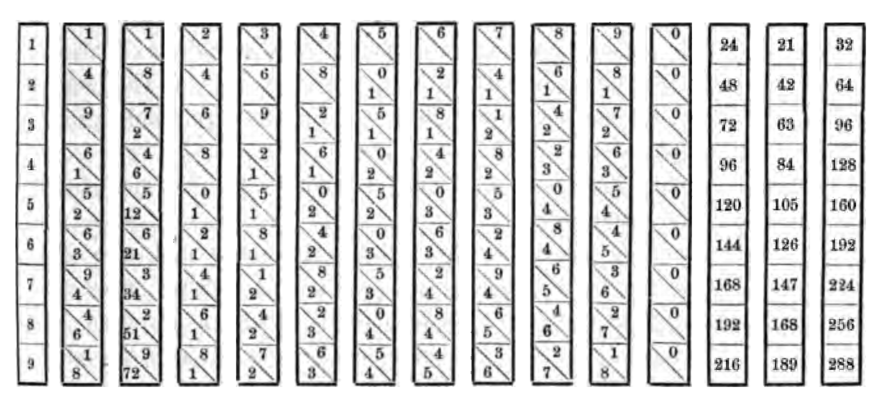
1) Nikolaus Kauffunger, „Rechenkunst auf den Linien und Ziffern samt allerhand Vortheilen, Geschwind- und Behendigkeiten, so deutlich und verständlich fürgeben, dafs sie jeder, der ziemlichen Verstandes, daraus von ihm selbst begreiffen möge“ etc. 1612.

2) Meichsner, Arithm. Kunstspiegel 1671. — Scharf, Arithm. Rosenkranz 1688. — Joh. Hemeling, Arithm. Trichter 1677 u. später.

3) Vgl. hierzu Klügel, Math. Wörterbuch II, Instrumentales Rechnen. — Desgl. Wolf, „Kurtzer Unterricht v. d. math. Schriften“ 1750 S. 5 ff. — Desgl. Kästner, Fortsetzung der Rechenkunst 1786 S. 573.

4) Erklärt von Kefsler 1619, Ursinus 1623, Stritter 1749, Hederich 1729.

Stäbe an, welche mit ihren Kopfzahlen 5, 8, 9, 4 den Divisor bilden. Nun wird untersucht, in welcher Horizontalreihe sich das Produkt befindet, welches vom Stückdividenden 25 462 abgezogen werden kann, das ist hier in der vierten; also ist die Quotientenziffer 4; das Produkt wird dann



abgelesen und in gewöhnlicher Weise subtrahiert. Man entnimmt also den Stäben die abzuziehenden Produkte. Bei Reducieren und Radicieren werden den Reduktions- resp. Wurzelstäben die abzuziehenden Produkte entnommen.

Das Versprechen, die Operationen ohne Kenntnis des Einmaleins zu vollziehen, ist eingelöst; doch ist mit diesem hölzernen Hilfsmittel der Methodik ein Dienst nicht geleistet. Trotzdem bediente man sich der Neperschen Stäbe beim Unterrichte, noch die Philanthropen gebrauchten und empfahlen sie.

Von der Beschreibung andrer gleichartiger Hilfsmittel stehen wir ab; wir nennen nur noch einige. Gaspar Schott (1608—1666, Professor in Palermo und Würzburg) brachte das Einmaleins auf drehbare Cylinder und vereinigte dieselben in einen Kasten, den „Rechenkasten".[1]) — Leupold brachte das Einmaleins auf bewegliche „Scheiben".[2]) — Samuel Reyher stellte 1688 Stäbe, Bacilli sexagenales genannt, mit den Vielfachen der ersten 60 Zahlen her, um ein Hilfsmittel fürs Rechnen mit den Sexagesimalbrüchen zu schaffen.[3])

b) Die Rechenmaschinen, auf denen die Species durch Kurbeldrehungen ausgeführt werden konnten, waren komplicierte, unvollkommene und kostspielige Apparate. Die Ankündigungen und Beschreibungen davon enthalten oft arge Täuschungen über die wirkliche Leistungsfähigkeit. Im Unterrichte wurden sie nie gebraucht.

1) Organum math. Würzburg 1668.
2) Leupold, Schauplatz der Maschinen.
3) Wolf, Kurtzer Unterricht S. 11.

Pascal (1623—1662) erfand schon im Alter von 19 Jahren eine Maschine, welche zur Ausrechnung nur Stellen der Ziffern und nachfolgendes Drehen erforderte. Die Beschreibung der Maschine sei jedoch ebenso schwer zu verstehen als eine neue zu erfinden.[1])

Leibniz[2]) sah in Paris ein Modell der Pascalschen Maschine und wurde dadurch angeregt, etwas Vollkommneres zu erfinden. Doch blieb seine Maschine, obwohl er der Herstellung derselben 24 000 Thlr. opferte, mangelhaft. Sie bestand aus 16 Scheiben und lieferte durch bloſses Drehen 16stellige Produkte.[3])

Joh. Polenus, Professor zu Padua, erfand 1709 eine ähnliche Maschine[4]) wie die Leibnizsche.

Martin Knutzen[5]) (1713—1751) lieſs eine groſse und eine kleine Rechenmaschine herstellen, welche zwar ein andres äuſseres Ansehen als die Leibnizsche Maschine hatten, aber dasselbe leisteten als diese. Ein Exemplar der kleineren sandte er mit einem Traktat „Arithmetica mechanica“ dem Prinzen Heinrich nach Berlin.[6])

Matthäus Hahn, ein Pfarrer, erklärte seine Rechnungsmaschine (1778) als die beste unter den bis dahin existierenden. Sie lieferte Resultate bis zu 14 Stellen. Die Beschreibung[7]) giebt über die innere Einrichtung keinen Aufschluſs, sondern hält sich an das äuſsere Aussehen und giebt eine Anweisung zur Handhabung. Die Ziffern der gegebenen Zahlen werden auf die gehörigen koncentrisch angeordneten Plätze gebracht; hierauf die Kurbel gedreht und das Resultat erscheint in den seitlichen Öffnungen, 14 an der Zahl. Additionen und Multiplikationen werden mit schwarzen, Subtraktionen und Divisionen mit roten Ziffern ausgeführt. Die Multiplikation ist aufs Addieren und die Division aufs Subtrahieren zurückgeführt. Soll beispielsweise 1 397 520 : 3235 mit der Maschine gerechnet werden, so stellt man 3235 unter 13 975 (wie in der Subtraktion) und dreht die Kurbel so oft, bis die obere Zahl kleiner als die untere geworden ist (viermal kann das Drehen geschehen). Hierauf rückt man den Divisor um eine Ziffer nach rechts, fügt die 2 des Dividenden dem Rest hinzu und dreht abermals die Kurbel (drei Drehungen). Dann wird der Divisor wiederum um eine Stelle gerückt und die Kurbel noch zweimal gedreht (Quotient 432). — Über den Nutzen schreibt der Erfinder selbst: bei

1) Wolf, Kurtzer Unterricht S. 10.
2) Allgem. deutsche Biogr. XVIII, 172—209.
3) Klügel, Math. Wörterbuch II, 736.
4) Wolf, Kurtzer Unterricht S. 10.
5) Allgem. deutsche Biogr. XVI, 334.
6) Buck, Lebensbeschreibungen preuſs. Math. S. 189.
7) Der deutsche Merkur 1779 May S. 139—154.

kleinen Rechnungen werde man auf dem Papier eher fertig, bei seitenlangen Additionen sei die Maschine schneller; aufserdem ermüde die Maschine nie, rechne fehlerfrei, und die Rechnung könne jederzeit unterbrochen und wieder fortgesetzt werden.

Joh. Helfrich Müller, Ingenieur, zeigte 1784 zu Göttingen eine Rechenmaschine[1]), welche vor der Leibnizschen einige Vorzüge hat. Sie liefert Resultate bis zu 14 Stellen, besteht aus Zahlenscheiben und ist so eingerichtet, dafs ein Glöckchen die Fehler anzeigt, welche beim Stellen der Ziffern und Drehen der Kurbel begangen werden. Ist beispielsweise beim Dividieren der Dividend kleiner geworden als der Divisor, so ertönt beim Weiterdrehen der Kurbel das Glöckchen, ebenso schlägt es an, wenn der Rechner in der Subtraktion die gröfsere Zahl von der kleineren abziehen wollte. Es sind zwischen einem fertigen Rechner und der Maschine 103 Proberechnungen angestellt worden; bei kleinen Zahlen war der Rechner, bei grofsen die Maschine schneller. Der Rechner hatte vier Stunden, die Maschine nur zwei gebraucht.

§ 71. **Mathematische Unterhaltungsschriften.** Man suchte die Beschäftigung mit der Mathematik, dieser trocknen Materie, auch angenehm und ergötzlich d. h. zur Unterhaltung zu machen. Schon das vorige Jahrhundert brachte uns mit den eingestreuten „Scherzexempeln“ einen Vorschmack von den Früchten dieses Strebens. In diesem Jahrhundert erschienen viele selbständige Bücher dieser Art, Bücher, in denen ausgesprochenermafsen die Mathematik zur Schärfung des Verstandes, zum Zeitvertreib und zur Ergötzlichkeit getrieben wurde. Selbstverständlich klingen auch ihre Titel[2]) ergötzlich: arithmetische Erquickstunden, mathematische Delectationen, math. Curiositäten, arithm. Lustgärtlein, arithm. Raritätenkasten, math. Sinnenkonfekt etc.

Ein sehr reichhaltiges Werk dieser Art edierte ein ungenannter Franzose: „Recréations mathématiques composées de plusieurs problêmes d'Arithmétique, Geometrie, Astrologie, Optique, Perspective ... Rouen 1628.“ - Unter starker Benutzung des vorgenannten Werkes sammelte Daniel Schwenter[3]) (geb. 1585, seit 1608 ord. Prof. der orientalischen Sprachen in Altdorf) in seinen Mufsestunden: „Deliciae Physiko-Mathematicae oder mathematische und physikalische Erquickstunden, darinnen 663 schöne, liebliche und angenehme Aufgaben und Fragen aus der Rechenkunst, Landmessen etc. ... begriffen seindt. Allen Kunstliebenden zu Ehren, Nutz, Ergötzung des Gemüths und sonderbarem Wohlgefallen an den Tag ge-

1) Göttinger Magazin der Wiss. III. Bd. 5tes Stück.
2) Siehe dieselben bei: Murhard, Lit. d. math. Wiss. I, 27 ff.
3) Biographisches über ihn bei: Doppelmayr S. 95.

geben, Altdorff 1636." Schwenters Werk wurde durch G. Ph. v. Harsdörffer[1]) 1651 um einen zweiten und 1653 um einen dritten Teil vermehrt und 1677 noch einmal aufgelegt.

Zur Orientierung über die mathematischen Ergötzlichkeiten überhaupt geben wir hieraus einige Proben, vermeiden aber Wiederholungen bezüglich § 63. Schwenters Buch enthält aus der Arithmetik 90 lustige Aufgaben, aus der Geometrie 56, Stereometrie 60, Musik 26, Perspektive 32, Katoptrik 28, Pyrobolia 69, Pneumatik 25, Hydraulik 59, Schreibkunst 13, Architektur 33, Chemie 32. Den Anfang der arithmetischen Aufgaben bilden eine Menge Regeln, gedachte Zahlen zu erraten, unter denen die „chinesische Erweiterung" (§ 63) die wertvollste ist. Minderwertig ist: „Heifs die gedachte Zahl tripliren, dies halbiren, dies tripliren; lafs dirs Produkt sagen, verdopple es und teile durch 9, so hast du die gedachte Zahl ($x \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{9} = x$). Nach anderen Regeln wird die gedachte Zahl durch Subtraktion oder Division eliminiert, und der Künstler ist dann so klug, das Resultat nennen zu können. Von etwas befsrer Qualität ist das schon in Stifels Arithm. integra 1544 gelehrte Kunststück, eine gedachte Zahl durch Proniczahlen zu finden. Eine Proniczahl[2]) ist ein Produkt aus zwei Faktoren, welche um eine Einheit verschieden sind ($35 \times 36 = 1260$). Die gedachte Zahl mufs kleiner als die Proniczahl sein. Bei Verwendung der Proniczahl 1260 heifst die Regel: „Lafs die gedachte Zahl durch 35 dividieren und den Rest nennen; multipliciere diesen mit 36; lafs die gedachte Zahl durch 36 dividieren und den Rest nennen, diesen multipliciere mit $35^2$. Addire beide Produkte, teile durch 1260, so ist der Rest gleich der gedachten Zahl" (Schwenter Nr. 13; eine Erklärung steht nicht da). Folgende Entwickelung begründet das Verfahren:

$$\begin{aligned} x &= 35m + \varrho \\ x &= 36n + r \\ 36\,x &= 36 \cdot 35m + 36\varrho \\ 35^2 x &= 35^2 \cdot 36n + 35^2 r \\ 36x + 35^2 x &= 36 \cdot 35m + 35^2 \cdot 36n + 36\varrho + 35^2 r \\ (1260 + 1)x &= 36 \cdot 35m + 35^2 \cdot 36n + 36\varrho + 35^2 r. \end{aligned}$$

Wird die linke Seite der letzten Gleichung durch 1260 dividiert, so ergiebt sich $x$ als Rest, folglich mufs derselbe Rest bleiben, wenn die rechte Seite durch 1260 dividiert wird. — Schwenters 15. Aufgabe: „Es trägt einer eine unbekannte Anzahl Eier zu Markte, welche sämtlich zerschlagen

1) Bekannt als Gründer der „pegnesischen Blumengesellschaft" zu Nürnberg 1642.

2) Ein derartiges Produkt hiefs bei den Griechen „heteromeke Zahl".

werden. Er weifs nur, dafs bei ihrer Abzählung zu je 2, 3, 4, 5 und 6 stets 1 übrig blieb, während bei Griffen zu je 7 keins übrig blieb.“ Wiewohl die Aufgabe viele Lösungen (301, 721, 1141, 1561 etc.) habe, so werde (bemerkt Schwenter) man aus der Gröfse des Korbes und Stärke des Trägers auf die richtige Zahl schliefsen. Erklärung: Zu 2, 3, 4, 5 und 6 ist der kleinste gemeinsame Dividend 60; 60 : 7 läfst den Rest 4. Es mufs also $60n + 1$ durch 7 teilbar sein. Für $n$ hat man die Bestimmungsgleichung $4n + 1 = 7m$, aufgelöst für ganze Zahlen kann $n$ die Werte 5, 12, 19 ... haben; also ist 301 die kleinste Zahl, welche der Aufgabe genügt. — Schwenters 16. Aufgabe ist ähnlich der vorigen: „Eine solche Zahl zu finden, dafs sie mit den Divisoren 2, 3, 4, 5, 6 geteilt die Reste 1, 2, 3, 4, 5 läfst und bei 7 aufgeht.“ Erklärung: 60 ist der kleinste gemeinsame Dividend für die gegebenen Divisoren, $60 - 1 = 59$ liefert zwar die verlangten Reste, doch 7 geht darin nicht auf. Es mufs $60n - 1$ einer Siebenerprodukt werden. Die Bestimmungsgleichung für $n$ ist $4n - 1 = 7m$, welche für $n$ die ganzzahligen Werte 2, 9, 16 ... liefert. — Die als wahrscheinlich angenommene Vermehrung eines Senfkorns in 12 Jahren, einer Sau in 14 Jahren und dergl. dienen als Beispiele für die Summierung geometrischer Progressionen. Die Beantwortung von Fragen, wie viele Wörter aus den 23 Buchstaben des Alphabets (gleichviel ob mit oder ohne Sinn) gebildet werden können, oder wie oft 12 Tischgäste ihre Plätze wechseln können, bieten Stoff zu den Permutationen. — Mit einer Aufzählung von Gegenständen, welche beständig in bestimmter Zahl vorzukommen pflegen (12 Stämme in Israel, 12 Steine im Jordan, 12 Edelsteine im Brustschilde Aarons, 12 Brunnen in Helim, 12 Kundschafter, 12 Apostel, 12 Zeichen im Zodiakus, 12 Monate, 12 mal wirft der Hase jährlich, 12 Monate trägt das Kamel etc.) schliefst die arithmetische Abteilung. Auf Proben aus Harsdörffers beiden Bänden verzichten wir. Er hat nach eigner Aussage dem Schwenter Nachlese gehalten wie Ruth den Schnittern des Boas. Leider hat er mehr Stroh als Ähren gefunden. Er unterhält den Leser 48 Seiten lang „von der Bedeutung der Zahlen“ und 32 Seiten lang noch „von anderen Curiositäten“ derselben. Seine Erörterungen sind weit schwächer als die von Schwenter und die Materie oft kindisch. Mehr mifsvergnügt als ergötzt legt der Historiker die bibeldicken Bände der „mathematischen Erquickstunden“ aus der Hand.

**§ 72. Arithmetische Poesie.** In enger Beziehung zu den mathematischen Unterhaltungsschriften steht die arithmetische Poesie, welche im 17. Jahrhundert ihre reichsten Blüten trieb. Der Zweck war bei beiden derselbe, was jene durch den Inhalt leisten wollten, suchte diese durch die Form zu erreichen. Es liefsen sich eine Menge Bücher anführen, in

denen Regeln und Aufgaben in gröfserer oder kleinerer Anzahl gereir sind. Wir wollen einige Proben aus der so oft (1693 zum siebenten Mal aufgelegten Arithmetica des Tobias Beutel mitteilen, worin alle Erkläru gen, Regeln und die Mehrzahl der algebraischen Aufgaben poetisches G wand tragen.

Numerieren lehrt im Rechen
Zahlen schreiben und aufssprechen.

In Summen bringen heifst addiren
Difs mufs das Wörtlein Und vollführen.

Theilen oder Dividiren,
Mufs das Wörtlein In regieren.
Hier merke, dafs noch insgemein
Zwey Species mit nöthig seyn,
Denn allhie werden allemal
Der Theiler und gefunden Zahl
Erst beiderseits multiplicirt,
Hernach das was kommt subtrahirt,
Das Facit bey der rechten Hand
Wird auch der Quotient genandt.

Wie eine Hand an uns die andre wäschet rein
Kann eine Species der andern Probe seyn.

Allhier [Gesellschaftsrechnung] addirt man die Posten allzumal,
Die der Gesellschaft seyn / das bringt die fördre Zahl;
Steht Mond und Zeit dabei, mufs man multipliciren
Die Zeit mit jeder Post, eh dafs man sie addirt,
Ist dann addirt, kann man nur durch die Detri führen
Und rechnen jeden Satz, dann kommt was sich gebührt.

Die Regel [R. falsi] ist nicht falsch, sie wird nur so genannt,
Weil sie durch falsche Zahl das Facit macht bekannt;
Wo gleiche Zeichen seyn, da mufs man subtrahieren,
Die aber ungleich seyn, dieselbigen addiren.

Ich [Springbrunnen] bin aus Ertz gemacht,
Dafs ich dem Wasser mufs
Hier lassen seinen Flufs
Durch meiner Glieder Pracht;
Wenn von sich nur allein
Mein weiter Rachen speyt,
Kann in sechs Stunden Zeit

Der Brunn' voll Wasser seyn.
Zwey Tage darf's genau
Wenn mein recht Auge rinnt,
Zum linken dreye nöthig sind.
Und wenn die rechte Klau
Ausfleuſst vier Tage, füllt
Sie diesen Brunnen voll.
Fragt sich, was Zeit seyn soll,
So alles vieres qvillt?
Antwort: vier Stunden Zeit
Und vier und viertzig ein
Und sechzig theil muſs seyn
Zum facit hier bereit.

§ 73. **Einfluſs des Münzwesens auf die Arithmetik.** Jeder Wechsel in den Münzverhältnissen zieht naturgemäſs auch Veränderungen im Rechnungswesen nach sich. In früheren Jahrhunderten herrschten Willkür und Unordnung im Münzwesen.[1]) Wer ein Stück reichsunmittelbares Gebiet besaſs, maſste sich das Münzrecht[2]) an. Da überdies die Ausübung desselben verpachtet (gewöhnlich an Juden) war, so wurde infolge schnöder Gewinnsucht eine solche Schinderei getrieben, daſs das Geld im Metall- und auch im Kurswerte groſsen Schwankungen[3]) unterlag und infolgedessen von Zeit zu Zeit behördlich geprüft[4]), im Auslande aber meist nicht als Zahlungsmittel genommen wurde.[5]) Des Mittels der Münzveränderung bedienten sich die Staatsregierungen vor dem Aufkommen der Tontinen und Renten, um sich aus der Geldnot zu helfen. Die Schwankungen des Feingehalts der Münzen wurden Veranlassung zur Entstehung des Agio. Um an groſsen langausstehenden Stiftungskapitalien wegen Verminderung des Feingehalts der Münzen am Kapitalwerte keine Einbuſse zu erleiden, so kam man überein, die Summe der Pfunde oder Mark in demjenigen Feingehalte festzusetzen, der zur Zeit des Vertrags im Wohnorte der Kontrahenten gesetzlich war, d. h. man schloſs nach $x$ Mark $n$lötigem Silber ab. Die Zahlung konnte dann in allerlei Münzsorten von beliebigem Feingehalte erfolgen. — Die Gründung der Banken[6]) und die Einführung des Banko-

1) Vgl. Rademann, Der Stadt Hamburg stets Blühender Wechselbaum, Hamburg 1698. — Marperger, Beschreibung der Banquen 1716. — Mone, Zeitschrift für Gesch. des Oberrheins II, 385—431.

2) Mone, a. a. O. II, 398, 402, 403.

3) 1530 galt der Reichsthaler 31 ß, 1560 32 ß, 1609 33 ß, 1621 54 ß.

4) Mone II, 429.

5) Süſsmilch, Göttl. Ordnung II, 388.

6) Barcelona 1349, Genua 1407, Amsterdam 1609, Hamburg 1619, Nürnberg

geldes gab dem Münzwesen einen gewissen Halt. Anfangs wurde das Bankogeld[1]) geprägt und kursierte, später unterblieb die unnötige Ausprägung und so wurde es zur fingierten oder Rechnungsmünze. Noch mehr Ordnung kam in die Münzwirren durch die Münzkonventionen, von denen die erste 1690 unter Festsetzung des Leipziger Münzfufses [1 kölnische Mark fein Silber zu 12 Thlr. = 18 fl] ausgeprägt] von den Fürsten der drei Staaten Kursachsen, Brandenburg und Braunschweig-Lüneburg geschlossen wurde. 1694 ordnete der Augsburger Konvent die Münzverhältnisse für Franken, Schwaben und Bayern; 1753 schlossen Österreich und Bayern eine Münzkonvention.

Die grofse Verschiedenheit im Münzwesen wurde einerseits die Veranlassung zur Entstehung von Specialschriften[2]), bestimmt für einzelne Länder, um den einheimischen Bedürfnissen zu genügen; andrerseits machte sie Resolvierungstabellen (siehe § 74) nötig, um dem Kaufmann als Ratgeber für den Handel mit dem Auslande zu dienen.

§ 74. **Tabellen.** a) Die Resolvierungstabellen dienen zur Umrechnung und Vergleichung von Münzen, Mafs und Gewicht verschiedener Provinzen und Länder. Wie notwendig solche Hilfsmittel damals waren, kann man aus der Zusammenstellung der vielen Münzen schliefsen, welche nach Siegmanns Resolvir- und Wechselbüchlein (1669) in der Mark Meifsen und Lausitz, diesem kleinen Gebiete, kursierten; es waren nicht weniger als 11: Schock (= 60 Groschen), Thaler, Gulden, Görlitzer Mark, gute Groschen, kleine Groschen, Weifsgroschen, gute Pfennig, kleine Pfennig, Weifspfennig, Kreuzer.

b) Kolossale Einmaleinstafeln. Das Werk des Herwart von Hohenburg: „Tabulae Arithmeticae *ΠΡΟΣΘΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ* universales ... MDCX“ enthält auf 999 Seiten sämtliche Produkte, welche sich aus je 2 der ersten 999 Zahlen bilden lassen. Jede Seite hat 11 Spalten, welche mit Ausnahme der ersten mit den Zahlen 0, 100, 200 ... 900 überschrieben sind. Jede erste Spalte enthält die ersten 100 Zahlen. Jede zweite Spalte beginnt der Reihe nach mit den Zahlen 2, 3, 4 ... 999 und enthält das 1-, 2-, 3-, ... 100fache der ersten Zahl der Spalte. Nimmt man nun die Summe von einem Hunderter, mit dem die Spalte überschrieben ist, und einer der ersten 100 Zahlen der ersten Spalte, so ist die Zahl, welche der betreffenden Vertikal- und Horizontalreihe zugleich

1621, Wien 1703, Paris 1716, London 1694. — Noback-Steyer, Allgem. Encykl. für Kaufl. 1864, S. 171—298.

1) Zu Amsterdam 1 ℔ Vlaems, zu London 1 £ Sterling, zu Venedig 1 Duc. di Banco.

2) Rechenbüchlein für Preufsische oder Württembergische oder Pfalzgräfische Währung und dergl. (Vollst. Titel in Murhard Lit. d. math. Wiss. I.)

angehört, das Produkt, dessen erster Faktor die genannte Summe ist und dessen zweiter Faktor die erste Zahl der zweiten Spalte ist. Die elfte Seite sieht so aus:

| | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 12 | 1212 | 2412 | 3612 | 4812 | 6012 | 7212 | 8412 | 9612 | 10812 |
| 2 | 24 | 1224 | 2424 | 3624 | 4824 | 6024 | 7224 | 8424 | 9624 | 10824 |
| 3 | 36 | 1236 | 2436 | 3636 | 4836 | 6036 | 7236 | 8436 | 9636 | 10836 |
| 4 | 48 | 1248 | 2448 | 3648 | 4848 | 6048 | 7248 | 8448 | 9648 | 10848 |
| 5 | 60 | 1260 | 2460 | 3660 | 4860 | 6060 | 7260 | 8460 | 9660 | 10860 |
| 6 | 72 | 1272 | 2472 | 3672 | 4872 | 6072 | 7272 | 8472 | 9672 | 10872 |
| 7 | 84 | 1284 | 2484 | 3684 | 4884 | 6084 | 7284 | 8484 | 9684 | 10884 |
| 8 | 96 | 1296 | 2496 | 3696 | 4896 | 6096 | 7296 | 8496 | 9696 | 10896 |
| 9 | 108 | 1308 | 2508 | 3708 | 4908 | 6108 | 7308 | 8508 | 9708 | 10908 |
| 10 | 120 | 1320 | 2520 | 3720 | 4920 | 6120 | 7320 | 8520 | 9720 | 10920 |
| 11 | 132 | 1332 | 2532 | 3732 | 4932 | 6132 | 7332 | 8532 | 9732 | 10932 |
| 12 | 144 | 1344 | 2544 | 3744 | 4944 | 6144 | 7344 | 8544 | 9744 | 10944 |
| bis 100 . . . | | | | | | | | | | |
| 99 | 1188 | 2388 | 3588 | 4788 | 5988 | 7188 | 8388 | 9588 | 10788 | 11988 |
| 100 | 1200 | 2400 | 3600 | 4800 | 6000 | 7200 | 8400 | 9600 | 10800 | 12000 |

Wie man mit Hilfe dieser Tafeln Produkte vielstelliger Faktoren berechnet, zeigt folgendes Beispiel. Die Aufgabe 461 235 987 mal 789 654 wird zerlegt in:

$$\begin{Bmatrix} (461\,000\,000 + 235\,000 + 987)\,654 \\ (461\,000\,000 + 235\,000 + 987)\,789\,000 \end{Bmatrix}$$

Gesucht werden auf Seite 653 die Produkte für den Faktor 654 und auf Seite 788 diejenigen für den Faktor 789. Man stellt die Produkte gehörig unter einander und addiert wie folgt:

$654 \cdot 987 =$ . . . . . 645 498
$654 \cdot 235 =$ . . . 153 690
$654 \cdot 461 =$ . 301 494
$789 \cdot 987 =$ . . . 778 743
$789 \cdot 235 =$ . 185 415
$789 \cdot 461 =$ 363 729

364 216 842 078 498

Ein Divisionsexempel sieht so aus:

235 987 in 186 348 078 498 = 789 654

$$\left\{\begin{array}{r} 185\,415 \ldots\ldots \\ 778\,743 \end{array}\right\} \begin{array}{l} = 789.235 \text{ auf Seite } 234. \\ = 789.987 \text{ auf Seite } 788. \end{array}$$

186 193 743

Rest 154 335 498

$$\left\{\begin{array}{r} 153\,690 \ldots \\ 645\,498 \end{array}\right\} \begin{array}{l} = 654.235 \text{ auf Seite } 234. \\ = 654.987 \text{ auf Seite } 653. \end{array}$$

154 335 498

Das Hohenburgsche Werk, ein unhandlicher Band von 10,5 cm Dicke und einer Blattgröfse von 52 und 27 cm, ist in diesem Jahrhundert in handlicher Form wieder auferstanden und zwar als: A. L. Crelle, „Rechentafeln, welche alles Multiplicieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei gröfseren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sichrer machen“; 1820 und 1857. Crelles Tafeln enthalten ebenfalls die Produkte aller zwei Zahlen von 1 bis 1000; auch ist die Anordnung der Produkte darin ganz dieselbe wie in den Hohenburgschen; nur ist die Einrichtung in jenen kompendiöser, sodafs sich der Umfang des Werkes auf 450 Seiten reduciert hat. Jede Seite hat zwei Spalten, jede Spalte enthält 1000 Produkte. Auf jeder Spalte steht oben links eine fettgedruckte Zahl, welche den einen Faktor für sämtliche Produkte der Spalte bildet und somit für das Aufschlagen mafsgebend ist. Die fettgedruckten Zahlen der Spalten wechseln von 2 bis 999. Die Zahlen mit Nullen am Ende sind aus begreiflichen Gründen ausgelassen. Von dem anderen Faktor stehen die Hunderter mit der fettgedruckten Zahl auf gleicher Horizontallinie, die Zehner und Einer aber in derselben Vertikalreihe. Neben der ersten Vertikalreihe, welche alle Zahlen von 1 bis 100 (excl. derjenigen mit Nullen am Ende) fortlaufend enthält, stehen die Produkte derselben mit der fettgedruckten Kopfzahl; in der nächstfolgenden Vertikalreihe findet man die Produkte jener um 100 vergröfserten Zahlen mit der fettgedruckten Kopfzahl [die zweiten Faktoren sind also der Reihe nach 101, 102 ... 199], weshalb diese Kolumme mit 100 überschrieben ist etc. Die vorletzte Kolumne ist mit 900 überschrieben, wo die Produkte der um 900 vermehrten Zahlen der ersten Kolumne anzutreffen sind. Die beiden letzten Ziffern der Produkte in den mit 100, 200 ... 900 überschriebenen Kolumnen sind fortgelassen und in die letzte Kolumne gestellt. Dies ist angängig, weil die zwei Ziffern beziehungsweise gleich sind [in den Produkten 176 $\times$ 143, 176 $\times$ 243, 176 $\times$ 343 stimmen die letzten zwei Ziffern überein]. Die Spalte, welche wir S. 127 aus dem Hohenburgschen Werke mitteilten, sieht bei Crelle so aus:

| 12 | | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 12 | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 72 | 84 | 96 | 108 | 12 |
| 2 | 24 | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 72 | 84 | 96 | 108 | 24 |
| 3 | 36 | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 72 | 84 | 96 | 108 | 36 |
| 4 | 48 | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 72 | 84 | 96 | 108 | 48 |
| 5 | 60 | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 72 | 84 | 96 | 108 | 60 |
| 6 | 72 | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 72 | 84 | 96 | 108 | 72 |
| 7 | 84 | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 72 | 84 | 96 | 108 | 84 |
| 8 | 96 | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 72 | 84 | 96 | 108 | 96 |
| 9 | 108 | 13 | 25 | 37 | 49 | 61 | 73 | 85 | 97 | 109 | 08 |
| 11 | 132 | 13 | 25 | 37 | 49 | 61 | 73 | 85 | 97 | 109 | 20 |
| 12 | 144 | 13 | 25 | 37 | 49 | 61 | 73 | 85 | 97 | 109 | 32 |
| 13 | 156 | 13 | 25 | 37 | 49 | 61 | 73 | 85 | 97 | 109 | 44 |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| 98 | 1176 | 23 | 35 | 47 | 59 | 71 | 83 | 95 | 107 | 119 | 76 |
| 99 | 1188 | 23 | 35 | 47 | 59 | 71 | 83 | 95 | 107 | 119 | 88 |

Wie man mit diesem kolossalen Einmaleins multipliciert und dividiert, haben wir schon gewiesen. Wir wollen noch eine Quadratwurzel mit Hilfe der Tafel berechnen. $\sqrt{35\,104\,993\,961\,032\,008}$. Man teilt den Radikanden von rechts nach links in Klassen von je sechs Ziffern. Die Wurzel der ersten Klasse 35 104 mufs nach gewöhnlicher Weise ermittelt werden; man findet 187. Von nun an operiert man mit Hilfe der Tafel. Sind Nullen nötig, so müssen je sechs auf einmal angehängt werden.

$\sqrt{35\,104\,993\,961\,032\,008} = 187\,363\,267$ Wurzel

Quadrat von 187 = . . . 34 969<br>
2mal 187 = 374 . . . 135 993 961<br>
374mal 363 = . . . . . . 135 762<br>
Quadrat von 363 . . . . . . 131 769<br>
zusammen . . . 135 893 769<br>
bleibt . . . . . . . . 100 192 032 008<br>
2mal 187 363 = 374 726<br>
267mal 374 726 = . . . . { 99 858<br>
193 842<br>
Quadrat von 267 = . . . . 71 289<br>
zusammen 100 051 913 289<br>
Rest 140 118 719

Auf ähnliche Weise verfährt man beim Ausziehen der Kubikwurzel. Mit einem Worte: man rechnet vermittelst der Tafeln jedesmal ebenso mit je drei Ziffern zugleich, wie ohne Tafeln mit einer Ziffer. Vor Erfindung der Logarithmen war dieses Hilfsmittel in trigonometrischen Rechnungen nicht zu verachten. Der Nutzen besteht darin, daſs dadurch sämtliche Multiplikationen und Divisionen, die eigentlich ermüdenden Teile aller numerischen Rechnungen, erspart oder wesentlich abgekürzt werden. Sind beim Multiplicieren die Faktoren und beim Dividieren der Divisor und Quotient kleiner als Tausend, so erspart der Gebrauch der Tafeln die Rechnung ganz, weil solche Produkte darin berechnet sind. Gröſsere Rechnungen werden vermindert in dem Verhältnisse, wie man mehrere Ziffern zusammennehmen kann. Ein gröſserer Nutzen als die Ersparung der Mühe ist der, daſs die Rechnung an Sicherheit gewinnt. Denn die Gelegenheit, im Rechnen zu irren, vermindert sich offenbar im gleichem Verhältnisse mit der Anzahl der Operationen.

c) Die Logarithmen[1]), das unschätzbare Hilfsmittel bei der Multiplikation, Division, Wurzelausziehung und Potenzierung vielstelliger Zahlen, bilden die kostbarste Bereicherung der praktischen Arithmetik im 17. Jahrhundert. Das Bestreben, die trigonometrischen Tafeln auf einen immer höheren Grad der Genauigkeit zu bringen und die dabei vorfallenden Rechnungen zu erleichtern, hatte schon zur Erfindung der Decimalbrüche geführt. Mit der zunehmenden Genauigkeit jener Tafeln wuchs gleichzeitig die Mühsamkeit in den astronomischen Rechnungen. Freudig begrüſste man daher Nepers (1550—1618?) Arbeit: „Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio, ejusque usus, in utraque trigonometria; ut etiam in omni logistica Mathematica, amplissimi, facillimi et expeditissimi explicatio. Authore ac Inventore Ioanne Nepero 1614“, in welcher er die Rechnungen mit trigonometrischen Funktionen durch die Rechnung mit deren Logarithmen ersetzte. Er bemerkte, daſs, wenn die Sinus (von 90° anfangend) in geometrischer Progression abnehmen, dann die Strecken, die auf dem horizontalen Durchmesser bis zu den Sinus hin abgeschnitten werden, in arithmetischer Progression stehen, und daſs man mit diesen statt mit den Funktionen rechnen könne. Neper nannte jene Zahlen Logarithmen. Wenn hie und da erwähnt wird, die Neperschen Logarithmen seien identisch mit den natürlichen, deren Basis $e = 2{,}71828\ldots$ ist, so ist das ein Irrtum. Neper hat an eine Basis überhaupt nicht gedacht, und überdies stimmt die Basis seines Systems nicht überein mit der Zahl $e$. Der Londoner Professor Brigg[2]) (1562—1630) machte Nepers Erfindung mit den

1) Vgl. Buck II, 44 und 258. — Gerhardt, Gesch. der Math. — Günther, Vermischte Untersuchungen. — Allgem. deutsche Biogr. Artikel Burgi.

2) Von 1619 ab Professor zu Oxford.

höchsten Lobsprüchen bekannt und opferte seine ganze Kraft dem Ausbau und der Verbesserung des Neperschen Systems. Er bemerkte bald die praktische Unzulänglichkeit desselben und fand, dafs die Einrichtung der Logarithmen viel bequemer ausfalle, wenn man dieselben mit dem Decimalsystem in Verbindung bringe und mit den Zahlen wachsen lasse, also log 1 = 0 und log 10 = 1 setze. Dieser Vorschlag fand Nepers Beifall und nun berechnete Brigg das erste Tausend der Logarithmen. 1624 gab er „Arithmetica logarithmica“ heraus, worin die Logarithmen für die Zahlen von 1—20 000 und von 90 000 bis 100 000 enthalten sind. Der gelehrte Buchhändler Vlacq aus Gouda in Holland ergänzte die von Brigg gelassene Lücke, indem er die Logarithmen für die Zahlen von 20 000 bis 90 000 berechnete. 1628 gab er das ergänzte Werk Briggs unter Beibehaltung des Titels „Arithmetia logarithmica“ heraus. Somit waren durch Brigg und Vlacq die Grundlagen für die neueren Tafeln geschaffen.

Unabhängig von Neper und auch schon vor[1]) ihm entdeckte Jost Bürgi die Logarithmen, ohne sie zu publicieren. Erst als Nepers Erfindung in Deutschland Eingang fand, trat Bürgi mit seinen „Progress-Tabulen ... Prag 1620“ hervor, berechnet schon 1610.[2]) Er geht darin von dem Zusammenhange der Glieder einer von 1 anfangenden geometrischen Progression mit den in arithmetischer Progression fortschreitenden Exponenten aus und sagt: „Betrachtent[3]) die eigenschafft und Correspondenz der zwei progressen alfs der Arithmetischen mit der Geometrischen, das was in der ist Multipliciren ist in jener nur Addiren, und was in der ist Dividiren ist in jener nur subtrahiren, und was in der ist radicem quadratam extrahiren ist in jener nur halbiren . . . so habe ich nichts nützlicheres erachtet, alfs diese tabulen so zu continuiren, dafs alle Zahlen so vorfallen in derselben mögen gefunden werden etc.“

Schon vor Bürgi und Neper war es bekannt, dafs jeder geometrischen Progression eine arithmetische entspricht[4]), und dafs die Multiplikationen, Divisionen, Potenzerhebungen und Wurzelausziehungen an Zahlen in der erstern nur Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen an Zahlen in der letztern sind.

Die praktische Arithmetik verdankt dem gewandten Rechner Jost Bürgi aufser den Logarithmen auch noch die Vorteile der abgekürzten Multiplikation, worauf Kepler aufmerksam machte.[5])

1) Gerhardt, Gesch. der Math. S. 119.

2) Allgem. deutsche Biogr. III, 604—606.

3) Gerhardt, Gesch. der Math. S. 117.

4) Stifel, Arithm. integra 1544 Bl. 31 und 37. — Grammateus, Rechenbüchlein 1518 Bl. 45.

5) Günther, Vermischte Untersuchungen S. 133.

**§ 75. Zinseszins- und Rabattrechnung.** Zinseszinsen konnte damals ein Gläubiger von einem Schuldner nicht erstreiten. Wenn aber auch der Richter in der dem Schuldner auferlegten Verzinsung unbezahlter Zinsen eine Härte für diesen erblickte, so konnte doch der Gläubiger nicht gehindert werden, bezahlte Zinsen an einen zweiten Schuldner als Kapital auszuleihen, und somit war für ihn der Effekt des ursprünglichen Kapitals, nämlich Abwerfung von Zinseszinsen, derselbe. Mit der Errichtung von Banken und Einführung von Renten kam die Zinseszinsberechnung von selbst in Gang, weil hier ein zahlungsunfähiger Debitor nicht vorausgesetzt wird. — Fehlerhaft ist diese Rechnung nie ausgeführt worden, nur war sie vor Erfindung der Zinseszinstafeln und Logarithmen mühsam. Vgl. § 52.

Anders verhielt es sich mit der Rabattrechnung, bei welcher grobe Fehler unterliefen, vorzüglich dann, wenn der Barwert einer in mehreren Terminen zahlbaren Summe zu ermitteln war. Zwei Fehler beging man dabei, man rechnete einfachen Rabatt statt doppelten und diesen in statt auf 100. Carpzov sagt beispielsweise: „100 Thlr. geben nach 2 Jahren 10 Thlr. Zinsen, soll man nun die 100 Thlr. gleich bezahlen, so ziehe man die 10 Thlr. ab.“ War also eine Summe $s$ nach $n$ Jahren fällig, so stellte bei dem üblichen Zinsfuſse $5\% = p$ die Differenz $s - \frac{nps}{100}$ den Barwert dar, eine Berechnungsart, nach welcher der Kreditor starken Schaden leidet. Denn wird $n = \frac{100}{p}$, so wird das Kapital durch den Rabatt aufgezehrt und der Gläubiger erhält nichts; wird $n > \frac{100}{p}$, so wird die obige Differenz negativ und der Gläubiger müſste dem Schuldner noch hinauszahlen. Obgleich man aber die Carpzovsche[1]) Methode ihrer Ungereimtheit wegen nicht erst anführen sollte, so war sie doch in Kursachsen die vor Gericht gebrauchte.

Leibniz reformierte die herkömmliche falsche Rabattrechnung, indem er die Notwendigkeit zeigte, den Rabatt auf statt in 100 zu berechnen. Die Schluſsweise der Leibnizschen „Anticipationsrechnung“[2]) ist folgende. Setzt man $\frac{100}{p} = m$, so sind die einjährigen Zinsen des Kapitals $C$ gleich $\frac{C}{m}$. Empfängt nun der Gläubiger die Zahlung 1 Jahr zu früh, so muſs er dem Schuldner die Zinsen auf 1 Jahr vergüten, deshalb ist $C - \frac{C}{m}$ zu zahlen. Da aber dem Gläubiger die Zinsen gleich jetzt abgerechnet werden, während sie doch erst nach 1 Jahre fällig sind, so muſs der Schuld-

1) Carpzov ist der Name einer auf dem Gebiete der jurist. und theolog. Wissenschaft ausgezeichneten Familie; Meyer, Konversationslexikon 3. Aufl.

2) Acta erud. Lips. 1683 Octob. S. 425.

ner dem Gläubiger wieder die Zinsen der Zinsen auf 1 Jahr vergüten, also ist $C - \frac{C}{m} + \frac{C}{m^2}$ zu zahlen. So gehen die Schlüsse fort in inf. Mithin ist der Barwert einer nach 1 Jahre fälligen Summe gleich $C\left(1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^4} - + \cdots\right)$, das ist $C\frac{m}{m+1}$ oder $C\frac{100}{100+p}$. Der Barwert wird demnach gefunden, wenn man bei 5% vom Kapital $\frac{1}{21}$ desselben abzieht und nicht wie herkömmlich $\frac{1}{20}$.

Die Einführung der Leibnizschen Methode vollzog sich keineswegs rasch; manche verstanden sie falsch, indem sie lehrten[1]), wenn für 1 Jahr $\frac{1}{21}$ vom Kapitale abzuziehen sei, so müsse man für 2 Jahre $\frac{2}{21}$ etc. abziehen. Erst im nächsten Jahrhundert kam der Leibnizsche Kalkül nach langem heftigen Streite[2]) zwischen Mathematikern und Juristen zur Anerkennung und Aufnahme.

Ein Mittelweg zwischen der ungereimten Carpzovschen und der korrekten Methode, welche doppelten Rabatt und diesen auf 100 rechnet, bildete die Hoffmannsche Methode, nach welcher einfacher Rabatt auf 100 gerechnet wurde. Diese Methode konnte bei den vorhandenen Landesgesetzen bestehen, während die Leibnizsche denselben zuwiderlief.

Die Hoffmannsche Rabatt-Tabelle[3]) ist sehr bequem eingerichtet; sie hat drei Kolumnen; in der ersten stehen die Jahre, in der zweiten die „Brüche", welche den Betrag des Rabatts als Bruchteil des Kapitals ausdrücken, in der dritten die Rabattbeträge von 1000 Thlr.

| 5% | Brüche | 1000 Thlr. geben Rabatt |
|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ J | $\frac{1}{41}$ | $24\frac{16}{41}$ |
| 1 - | $\frac{2}{42}$ | $47\frac{13}{21}$ |
| $1\frac{1}{2}$ - | $\frac{3}{43}$ | $69\frac{33}{43}$ |
| 2 - | $\frac{1}{11}$ | $90\frac{10}{11}$ |
| . | . | . |
| . | . | . |
| . | . | . |
| 30 - | $\frac{3}{5}$ | 600 |

Zur Gewinnung der Brüche dient eine leichte Regel. $\frac{p}{100+p}$ giebt den ersten Bruch, aus welchem die folgenden dadurch entstehen, daſs man den zunächst vorhergehenden im Zähler und Nenner um 1 vermehrt, sobald $\frac{p}{100+p}$ die Form eines Stammbruchs hat, wie dies bei $p = 5$, $p = 4$ der Fall ist. Die Regel gilt auch für halbjährliche Termine.

§ 76. **Wechselrechnung.** Schon § 53 haben wir erwähnt, daſs durch die Korrespondenz der Amsterdamer Kaufleute der Gebrauch der Wechselbriefe in Europa allgemein wurde. Aus diesem Umstande erklärt

1) Polack, Mathesis Forensis 1. Aufl. 1730 § 44.

2) Orientiert wird man über denselben in Polack, Mathesis Forensis 2. Aufl. 1740.

3) Zu finden in Polack, Mathesis Forensis 1740, desgl. in Creuzberger, Vollst. Rechenbuch 1754.

es sich, dafs die Holländer anfangs in Ausbeutung der Wechselgeschäfte den anderen Nationen überlegen waren. Aus den Kursschwankungen zogen sie dadurch Gewinn, dafs sie auf ausländische Plätze an offen gehaltene Ordre remittierten, die Gelder aber zur Vermeidung von Provision und Mäklergebühr nicht auszahlen liefsen, sondern wieder trassierten oder Rimessen verlangten, wenn ihnen der Kurs günstig stand. „Diese Wechselgewohnheit aber von Amsterdam ist auf keinem Ort so praktikabel als auf Frankfurt, dahin jährlich viel Geld disponirt wird, und gleichwohl die Frankfurter wenig davon geniefsen, also dafs es mehr zum Scheine dient als zur That.“[1]) — Zur gewinnbringenden Betreibung solcher Geschäfte sind die Arbitragerechnungen die notwendige Voraussetzung, welche bei den Holländern auch erfüllt war, indem sie die Wechselrechnung auf eine höhere Stufe als anderwärts gebracht hatten. Zu einer Zeit, in der man in Deutschland kaum die ersten Spuren der Wechselrechnung antrifft, besafsen sie schon Specialschriften[2]) darüber.

In Frankreich nahm der Wechselhandel seinen Ausgang in Lyon. Karl IX. bestimmte 1563 zur Errichtung einer Wechselbank die Hinterlegung einer Kaution von 50000 Thlr., führte die Wechselhaft ein und ernannte ein Schiedsgericht zur unentgeltlichen Rechtsprechung in Wechselstreitigkeiten.[3]) 1667 wurde in Lyon die Verpflichtung zur Acceptation verfügt.

Wechselrechtliche Satzungen pflanzten sich ursprünglich durch Überlieferung fort, darnach wurden sie den Bankordnungen[4]) einverleibt, endlich erliefs man specielle Wechselordnungen.[5])

Zubrodts Wechselunterricht ist nach den europäischen Hauptwechselplätzen geordnet, 26 an der Zahl, darunter Amsterdam, Paris, Lyon, Venedig, Frankfurt, Hamburg, Nürnberg etc. Die Behandlung befolgt für jeden Wechselplatz dasselbe Schema. Voran steht der Kurszettel, auf dessen Grundlage die verschiedenen Wechselrechnungen der Schwierigkeit nach geordnet in drei Abteilungen vorgeführt werden. Die erste Abteilung behandelt nur einfaches Trassieren und Remittieren, die zweite enthält die

1) Zubrodt, Unterricht der Wechselhandlung 1669 S. 10.

2) Zubrodts Unterricht der Wechselhandlung ist die Übersetzung eines holländischen Werkes; vielleicht des folgenden: v. Velde, T'Onderrecht des Wissels ende Wisselhandeling oner gantsch Christenryck . . . Amsterdam 1647. — J. Phoonsen, Wissel Styl tot Amsterdam vervattende, niet alleen wat men gewoon, maar ook wat een voorsichtigk koopmann tot syn securiteyt, in de Wisselhandel dienstig en noodigk is 1676.

3) Savary, Der vollkommene Kauf- u. Handelsmann, Genf 1676 S. 225, 361, 259.

4) Marperger, Montes pietatis 1715; — Marperger, Beschreibung der Banquen 1716.

5) Zu Amsterdam 1601, Hamburg 1603, Österreich 1663, Frankfurt a. Main 1676, Leipzig 1682, Braunschweig 1686 etc. Noback-Steyer, Encyklopädie S. 1252.

Rechnungen für solche Geschäfte, in denen die Verbindung jener beiden Operationen vom eignen Platze aus vorkommt; die dritte umfafst die Wechselkommissionsrechnungen (Kommissionär am fremden Platze). Die Methode ist ganz dem Geiste der Zeit entsprechend, nämlich eine Beschreibung des Verfahrens ohne Begründung, nur mit Angabe äufserlicher Anhaltepunkte für den einzuschlagenden Weg. Zur Charakterisierung führen wir einige Beispiele auf, zunächst eins für einfaches **Remittieren:** „Amsterdam wechselt auf London, Und gibt 35 s 6 ₰ Vlaems mehr oder weniger, um zu London zu haben 1 ℔ Sterling. Um nun zu wissen, wieviel Sterling man haben solle vor 500 ℔ Vlaems im vorgemeldtem Preis 35½ Vlaems auf uso von einem Monat, so multiplicir die 500 ℔ Vlaems zu ₰, wie auch den Preis der 35 s und 6 ₰ und dividire hiermit jenes, was dann kombt, das sind Pfd Sterling, den übrig bleibenden Rest multiplicir mit 20 Schill. Sterlings, das Produkt aber teile ab durch den vorigen Teiler des Wechsels, was kombt, das seynd Schill. Sterlings, wann dann noch was restiret, so multiplicir es mit 12 und teile wie zuvor, so kommen ₰. Also dafs Amsterdam vor 500 ℔ Vlaems à 35 s 6 ₰ zu London credit haben soll 281 ℔ 13 s 9$\frac{5}{8}$ ₰ Sterlings."

Die **Grundsätze der Arbitrage** sind folgendermafsen ausgesprochen: „Wenn man im remittiren einen ungewissen (= veränderliche Valuta) vor einen gewissen Preifs (= feste Valuta) gibt, dann bestehet vor den Remittenten der avance im wenig geben. Wenn man aber Geld will einziehen, dann ist der ungewisse höhere Preifs besser. Der Zieher und Remittirer haben ungleiche Wünsch und Gedanken, der erste sucht einen hohen Preifs zu ziehen, welches sein Vorteil ist, wenn das Ort, da er uff ziehet, gewissen Preifs giebt; der ander aber sucht wenig zu geben, wann das Ort, da er sein Geld hin remittirt, gewissen Preifs giebt. Dieses ist eine gewisse Regel, dafs man allzeit im ziehen mufs trachten viel zu bedingen, hingegen im remittiren, so man anders mit Nutz wechseln will, das contrarium zu observiren. Und ist ganz das Widerspiel, wann man einen gewissen gegen einen ungewissen Preifs wechselt, wo der Zieher viel gewisse Preifs vor wenig ungewisse, und der Remittirer wenig gewisse gegen viel ungewisse zu geben sucht." (Zubrodt S. 55.)

In Befolgung dieser Grundsätze hat der Kommissionär die Vergleichung der Kurse entweder nach der direkten oder nach der indirekten Regeldetri vorzunehmen. Zur Entscheidung, welche von beiden im jeweiligen Falle anzuwenden ist, sind zwar praktische aber doch sehr äufserliche Kennzeichen gegeben. „Wenn das Ort, in welchem man sein Commission soll effectuiren an die beide Ort, darauf sie trassiren und remittiren mufs, das unsichere giebt, dann mufs der Calcul durch die rechte Regeldetri gemacht werden, also dafs man vor die erste und zweyte nombre

nimmt die geordonnirte Preisen und vor die letzte nombre den Preis, so man coursable findet.“ Der Ansatz wird auch dann nach der direkten Regeldetri formiert, wenn der Ort des Kommissionärs für beide Orte die feste Valuta hält.

Beispiel: „Venetia ordonnirt Amsterdam ihr zu remittiren à $101\frac{1}{3}$ ₰ und auff Nürnberg zu ziehen à $68\frac{1}{3}$ ₰. Amsterdam findet den Cours auf Venedig à 102 ₰. Um nun den Schaden von der remesse in Tratos zu ersetzen, zu was Preifs soll man auf Nürnberg trassiren. Dieses zu erfahren, setze durch die Regeldetri: Wenn $101\frac{1}{3}$ auf Venedig geben $68\frac{1}{3}$ ₰ auf Nürnberg, was geben 102 ₰ auf Venedig, facit $68\frac{3}{4}$ ₰.“ — „Wenn aber ein Ort, wo die Commission geschehen soll, gibt an die Ort, da sie soll trassiren und remittiren, nämlich an den einen das sichere und an den andern das veränderliche, so mufs man den Calcul durch die Regeldetri inversa machen. Z. B. Dantzig ordonnirt Amsterdam ihr zu remittiren à 201 Groschen und auf Venedig zu ziehen à $102\frac{1}{2}$ ₰. Amsterdam findet Brief auf Dantzig à 199 Groschen. Es fragt sich, dieweil man Schaden in der Rimesse vermerket, zu wafs Preifs sie dann auf Venedig solle ziehen? [Amsterdam hat fest 1 ℔ Vlaems = 201 Gr. veränderlich für Danzig; 102 ₰ veränderl. in Amst. = 1 Duc. fest in Venedig], also 199 Gr ... $102\frac{1}{2}$ ₰ ... 201 Gr, fac. $103\frac{8}{15}$ ₰ ca.“

§ 77. **Rückblick auf das 17. Jahrhundert.** Der 30jährige Krieg hatte das Land verwüstet, die Bewohner verarmt und das Schulwesen geschädigt. Die Staatsregierungen konnten wegen des Abgangs äufserer Mittel dem niederen Schulwesen gar nicht, dem höheren nur wenig aufhelfen. Nur die Städte stellten aus eigner Kraft durch Gymnalsialordnungen die lateinischen Schulen wieder in einen leidlichen Zustand. Neben den lateinischen Schulen existierten noch deutsche, Winkel- und Rechenschulen, letztere waren die besten. Lehrerbildungsanstalten traten noch nicht ins Leben. Die Lehrer waren im allgemeinen ungeschickt, viele roh und von anrüchiger Vergangenheit, alle schlecht besoldet.

Die praktische Arithmetik erhielt durch die epochemachende Erfindung der Logarithmen ein wichtiges Hilfsmittel zur Abkürzung der Rechnungen; erwähnenswert sind auch die Methode der abgekürzten Multiplikation, die Vervollkommnung der Wechselrechnung und die Reformierung der Rabattrechnung durch Leibniz.

Die Methode blieb nach wie vor Mechanismus, d. h. Operieren nach Regeln ohne Begründung. Das Bestreben, die Erlernung der Rechenkunst leicht zu machen, führte zur Erfindung von Rechenmaschinen. Die Bemühungen, dem trockenen Stoffe auch eine ergötzliche Seite abzugewinnen, rief die mathematischen Unterhaltungsschriften hervor.

## Die zweite Periode: von 1700—1800.

# Betonung der beweisführenden Lehrart.

Das 18. Jahrhundert läfst sich nicht mit einem Schlagworte charakterisieren, das alle Erscheinungen umfafste. Unsere Überschrift bezeichnet nur die hauptsächlichste Strömung. Nicht selten berühren sich die Extreme, so auch hier. In der ersten Hälfte des Jahrhunderts stellte man die in dem mathematischen Unterrichte liegende Verstandesübung höher als die Gewandtheit in der Kunst selbst; doch liefsen die späteren Methodiker die Rechenfertigkeit wieder in das ihr gebührende Recht treten. — Bevor wir aber auf die Details unsres Gegenstandes eingehen, müssen wir die Entwickelung des Schulwesens in den Hauptzügen markieren.

§ 78. **Schulwesen.** In der Gesetzgebung suchten die Regierungen jetzt nachzuholen, was sie im 17. Jahrhundert versäumt; fast kein Jahr verging, ohne dafs eine Schulordnung[1]) publiciert worden wäre, und gegen das Ende des 18. Jahrhunderts war fast kein deutsches Ländchen mehr ohne eine solche. Dieselben enthalten mehr oder weniger vollständig alle die fundamentalen Bestimmungen, deren Gesamtheit gegenwärtig zu einem wohlgeordneten Schulorganismus gehören.

Die Führerschaft unter den Pädagogen hatten in diesem Jahrhundert nach einander die Pietisten und Philanthropen. Jene fanden, beseelt von dem Geiste helfender und rettender Liebe, in der Ausübung des Erziehungswerkes ihr eigentlichstes Arbeitsfeld. Die grofsartigen, unvergänglichen Schöpfungen des Pietismus, die Franckeschen[2]) Stiftungen in Halle, die sich aus kleinen Anfängen zu Instituten entwickelten, welche die kühnsten Erwartungen der Gründer weit übertrafen, beweisen den späteren Geschlechtern noch heute, dafs christliche Liebe alles vermag. Als aber den Pietisten der fromme Sinn schwand und sie nur noch frömmelnde Gebärden zeigten, verloren sie in der öffentlichen Meinung, und die Phi-

---

1) Vormbaum, III. Bd.

2) Raumer, Gesch. d. Päd. II, 112 ff.

lanthropen[1]) wurden nun mit ihren „Schulen der Aufklärung" die Führer unter den Pädagogen. Leider rückten sie mit ihrem Weltbeglückungsliberalismus die Schule weg von ihrer einzig wahren Grundlage, dem Christentume. Weltbürger zu erziehen, nicht durch sprachliche und kirchliche Belehrung, sondern durch frühzeitige Aufklärung und Mitteilung von Realien waren Ziel und Weg ihres Erziehungssystems. Mögen sie aber auch in dieser Hinsicht viel gesündigt und manche methodische Thorheit begangen haben, so ist doch ihr Streben und Wirken von dem segensreichsten Einflufs[2]) auf die Entwickelung der Methode geworden. Alle ihre Zeitgenossen schwärmten mit ihnen für Methode.

Der Reformator des Dorfschulwesens wurde der edle Freiherr von Rochow zu Rekan bei Brandenburg. Er liefs in Rekan durch Bruns eine Schule errichten, die in solch ausgezeichneten Ruf kam, dafs man nach Rekan pilgerte wie später nach Ifferten. Binnen 10 Jahren waren 1000 Personen in Bruns' Schule gewesen. Der preufsische König liefs 1773 nach jener Musterschule die preufsischen Landschulen organisieren.

Den Rechenschulen erstand in der durch den Pietismus neugeschaffenen Realschule[3]) eine überlegene Konkurrenzanstalt. Die Realschule (erste von Semler in Halle 1739, nächste von Hecker in Berlin 1747) war die höhere Bürgerschule für Knaben und legte ursprünglich das Hauptgewicht auf Realien und Mathematik, sie entzog durch ihre besseren Leistungen den mittelalterlichen Instituten (Rechenschulen) die Lebensfähigkeit. In raschem Fluge nahm die Realschule ihre Entwickelung aufwärts und trat in diesem Jahrhundert als Realschule I. Ordn. dem Gymnasium ebenbürtig zur Seite. Durch die in neuester Zeit geschehene Umwandlung der Realschule I. Ordn. in das Realgymnasium ist der eigenartige Entwickelungsgang dieser Schulgattung durch starke Annäherung an das Gymnasium geändert worden.

Die Pädagogik trat nun auch als gesonderte Wissenschaft auf die Tagesordnung. 1733 veröffentlichte Rambach den „wohlunterwiesenen Katechet" und hielt in Jena und Giefsen die ersten Vorlesungen über Pädagogik. 1774 wurden in Fulda vom Landesherrn pädagogische Vorlesungen angeordnet.[4]) In der Heckerschen Realschule sprach man von einer Technik des Unterrichtens. Den Philanthropen blieb es vorbehalten, alle für Methode zu begeistern. Sie brachten die Wahrheit zur Anerken-

---

1) Raumer, Gesch. d. Päd. II, 212 ff. — Niemeyer, Grundsätze d. E. u. d. U. 1819 III, 364—377.

2) „Das Dessauer Philanthropin in seiner Bedeutung für die Reformbestrebungen der Gegenwart", abgedruckt in: „Verhandlungen der XXXVII. Versammlung der Philologen und Schulmänner zu Dessau."

3) Raumer II, 212 ff. — Schmidt, Encyklopädie VI, 673 ff.

4) Heppe II, 15.

nung, dafs das Unterrichten nicht nur darin bestehe, dem Schüler successive eine Summe von Wahrheiten vorzusagen und einzuprägen, sondern dafs es eine Kunst sei und methodisch eingerichtet werden müsse.

Man ging nun auch mit der Errichtung von Seminaren zur Ausbildung tauglicher Lehrkräfte vor. Schon Francke erkannte die Notwendigkeit solcher Anstalten und schuf in Halle das Pädagogium. 1732 wurde in Stettin mit dem Waisenhause ein Seminar (das erste) und 1748 eins mit der Heckerschen Realschule in Berlin verbunden. In dem letzteren liefs Felbiger (1724—1788), der Reformator des katholischen Schulwesens, heimlich drei begabte katholische Jünglinge ausbilden und gründete dann 1765 die katholischen Seminare zu Leubus, Grüssau, Rauden, Breslau.[1]) In der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts erfolgte noch die Gründung vieler Seminare, zu Hannover 1757, Breslau 1767, Meiningen 1778, Kassel 1779, Kiel 1781, Gotha 1780, Dresden-Fdchst. 1785, Weifsenfels 1796, Hildburghausen und Freiberg 1797, Plauen 1800.

Das stärkste Hindernis, welches der Entwickelung des Schulwesens entgegenstand, liefs man unbeseitigt, nämlich die quälende Sorge der Lehrer ums tägliche Brot. Aussprüche, wie: „Es[2]) wird auf die Versorgung des Viehhirten mehr als auf die des Kindererziehers gesehen“ oder „man[3]) giebt den Schulbedienten Zeisigfutter und legt ihnen Eselsarbeit auf“, charakterisieren die traurige äufsere Lage hinreichend. Durch Nebeneinkünfte mufsten sich die Lehrer, vorzüglich auf dem Lande, diese verbessern. Nach einer Verordnung 1738 durfte in Brandenburg auf dem Lande nur der Schulmeister das Schneiderhandwerk betreiben.[4]) Die Gothaer Lehrer waren angewiesen, sich durch Hopfen-, Obst- und Gemüsebau, durch Seiden- und Bienenzucht, durch Handel mit Sämereien und Schreibmaterialien, durch Bücherbinden, Papparbeiten, Notenschreiben u. s. w. Nebenverdienst zu verschaffen.[5]) — Es war aber nicht allein die äufsere Lage der Elementarlehrer eine höchst traurige, sondern auch die Besoldung der mathematischen Professur war mangelhaft[6]), so dafs diese nur aus Not angenommen und bei erster Gelegenheit mit einer einträglicheren vertauscht wurde; nicht selten wurde dann die mathematische als Nebenfakultät beibehalten.

**§ 79. Arithmetische Anforderungen in den Lehrplänen.** Die lateinischen Schulen verharrten auch fernerhin in der bisher geübten Ver-

1) Heppe I, 97.
2) Heppe I, 248.
3) Heppe I, 254.
4) Heppe III, 9.
5) Heppe II, 261.
6) L. Ch. Sturm, Kurtzer Begriff der g. Mathesis V, Vorrede.

nachlässigung der praktischen Arithmetik. Die im Lehrplane für das Rechnen bemessene Zeit war eine Stunde wöchentlich, in manchen Klassen gar keine. Über die Regeldetri ging man nicht hinaus, der Erlernung praktischer Vorteile wurde keine Zeit gewidmet. Der Lehrplan für die Fürstenschule zu Pforta 1748 bestimmt: „I. bei den Untern die ganzen Zahlen und die Brüche nach dem langen Wege; II. bei den Mittlern die Praktik in Ganzen und Brüchen, die Regeldetri; III. bei den Obern die Decimalrechnung und Trigonometrie."[1]) 1773 kam der Passus hinzu: „Die Rechenkunst sollen die Knaben so lernen, wie sie theils dieselbe künftig in den Geschäften des Lebens brauchen können, theils um zur Geometrie vorbereitet zu werden. Dahero sind sie in den öffentlichen Stunden mit Erlernung der schweren Rechnungen und künstlichen Vortheile, die nur im Handel nützlich seyn können, nicht aufzuhalten."[2]) Kästner[3]) führt noch an, manche hätten die praktische Rechenkunst unter der Würde lateinischer Schulen gehalten.

Die Lehrpläne[4]) für deutsche Schulen schrieben auch (gewöhnlich in drei Abteilungen) als Stoff die Species in ganzen und gebrochenen Zahlen und die Regeldetri vor. Der Unterricht war nicht Massen- sondern Einzelunterricht. Ein deutliches Bild über den Verlauf der Rechenstunden entrollt uns der Lehrplan[5]) für die deutsche Schule der Franckeschen Stiftungen zu Halle 1702, weshalb wir die betreffenden Bestimmungen aufnehmen. „§ V. Zu der Arithmetica sind alle Kinder, die fertig lesen können, anzuführen. § VI. Weil es nicht angehet, wie man solches aus der Erfahrung hat, dafs man in Arithmetica Classen mache, indem die ingenia varia, und einer im Rechnen hurtiger ist als der andre, und also einer mit dem andern aufgehalten wird, so hat man es bisher auf andre Art versuchen müssen. Nemlich es wird ein gedruckt Rechenbuch gebraucht, darinnen mancherlei Aufgaben durch alle Species, Regulamdetri, Practicam und andre Rechnungen zu finden, wozu man sonderlich gut befunden Tobiae Beutels Rechenbuch. Nach demselben soll der Rechenpräceptor die Arithmeticam lehren. § VII. Bei diesem Rechenbuch braucht der Präceptor keine Aufgaben zu dictiren, sondern ein jedes Kind kann solche aus dem Buche abschreiben und in der Stille elaboriren. Da unterdessen der Präceptor herumgehet und nachsiehet, was ein jegliches machet, und

1) Enthalten in Hübsch, Arithm. portensis 1748 S. 15.

2) Vormbaum III, 631.

3) Kästner, Gesch. d. Math. III, 429.

4) Für Waldeck 1704 bei Vormbaum III, 148. — Für Sachsen-Eisenach 1705 bei Vormbaum III, 171. — Für Württemberg 1729 bei Vormbaum III, 330. — Für die Oberlausitz 1770 bei Vormbaum III, 681.

5) Vormbaum III, 21.

wo eins nicht fortkommen kann oder gefehlt hat, es ihm zeiget und forthilft.

§ VIII. Weil aber der Präceptor nicht allen Kindern auf einmal helfen kann, so mufs eins auf das andre warten. Damit aber diejenigen, die etwan sich nicht helfen können und der Präceptor doch nicht alsbald bei ihnen seyn kann, nicht dürffen müssig sitzen, sollen sie unterdessen etwas von den elaborirten Exempeln in das Reine schreiben, bifs der Präceptor auch zu ihnen kömmt. Und weil manche nachlässig sind, und, da der Präceptor bei andern Kindern ist, nichts rechnen, so sollen die Kinder alle Rechenstunden das Datum ins Buch schreiben, damit man, wann die Rechenbücher Sonnabends besehen werden, alsbald könne erkennen, ob einer faul oder fleifsig gewesen.

§ IX. Demnach an dem sogenannten Einmaleins viel gelegen, soll allzeit beym Anfang der Rechenstunde ein Kind das Einmaleins entweder auswendig deutlich hersagen, oder nur laut lesen, welches die andern Kinder heimlich nachsagen müssen. Denn da wird es geschehen, dafs sie es unvermerkt lernen, und also nicht nöthig seyn wird, solches absonderlich in kurtzer Zeit lernen zu lassen, als wodurch die Kinder nur marcerirt und vom Rechnen abgeschrecket werden.

§ X. Wenn in Beutels Rechenbuch Exempla mit unbenannten Zahlen vorkommen, wie solches sonderlich geschieht in speciebus, so kann der Rechenpräceptor solche durch Zusetzung der Thlr, fl, ℔ etc. benannt machen, damit die Kinder alsbald den Nutzen von dem Rechnen sehen. Es kann auch alle Stunden ein Knabe ein Exempel laut an der Tafel machen in derjenigen Rechnung, darinnen er begriffen ist, jedoch, dafs alle Tage nach der Ordnung ein andrer sey.

§ XI. Es wird sehr gut seyn, wenn der Rechenpräceptor des Beutels Rechenbuch selbst durchrechnet, so wird er den Kindern desto hurtiger forthelfen können.

§ XII. Was die Practicam anlanget, so kann der Präceptor insonderheit Struntzens Rechenbuch (= Neuaufgerichtete Rechenschule Leipzig 1717) vor sich gebrauchen, weil darinnen solche Rechnung ex professo tractirt worden, damit er solche desto deutlicher die Kinder lehren kann.

§ XIII. Hat etwan ein Knabe des Beutels Buch durchgerechnet, so kann man ihm in allen speciebus noch etliche andre Exempel geben und elaboriren lassen, damit er nicht nur alles kürtzlich wiederhole, sondern auch es desto weniger vergesse.

§ XIV. Die Discipuli müssen Freyheit haben, ihre Dubia vorzubringen, weil sie nicht alles gleich fassen können und der Präceptor mufs ihre Dubia mit Gedult anhören, und sie mit Sanftmut unterweisen, doch nicht mehr als einen allzeit reden lassen, und wenn solchem sein Zweiffel be-

nommen, auch eines andern Zweiffel hören. Der Präceptor soll zum öfftern die Kinder zum Fleifs im Rechnen ermahnen, und ihnen vorstellen, was es für grofsen Nutzen im menschlichen Leben hat."

§ 80. **Mathematische Ausbildung der Lehrer.** Die mathematische Ausbildung der Lehrer erstreckte sich nicht über das Mafs von Wissen, welches sie einst selbst zu lehren hatten. Für die lateinischen Schulen war die Beherrschung des Wolfschen „Auszug aus den Anfangsgründen aller mathematischen Wissenschaften" ausreichend und für die deutsche Schule genügten schon weit geringere Kenntnisse. Durch die hie und da genannten Lehrbücher ist man in der Lage, den Umfang genau fixieren zu können. Im Pädagogium zu Halle war fürs praktische Rechnen[1]) des Struntze „Neuaufgerichtete Rechenschule 1717" und für die Mathesis[2]) Wolfs „Auszug etc." zur Benutzung vorgeschrieben. Im Seminar zu Gotha 1780 bildeten die Seminaristen bezüglich des Rechnens zwei Klassen und lernten in der einen die vier Species und die Regeldetri, in der andern die Brüche, die Gesellschaftsrechnung, Praktik und die Anfertigung einer Kirch-, Gemeinde- und Vormundschaftsrechnung.

§ 81. **Nutzen mathematischer Kenntnisse.** Die Aufmunterung zu eifrigerer Betreibung der mathematischen Wissenschaften als bisher ging von den Gelehrten aus, namentlich von den beiden Sturm, von Wolf und Kästner. Da in allen Wissenschaften das Utilitätsprincip betont wurde, so konnte es nicht fehlen, dafs man es auch in der Mathematik hervorkehrte. Murhard zählt eine grofse Menge Schriften aus jener Zeit auf, in denen die Unentbehrlichkeit mathematischer Kenntnisse für alle Fakultäten und alle Berufsarten nachgewiesen wurde. Der Nachweis des Nutzens der Mathematik wurde für Förster und Militärs ebensogut geführt wie für Theologen und Juristen, für Moral und Erziehung ebensogut wie für Physik und Chemie. Die Quintessenz aller Aussprüche über den Nutzen der Mathematik ist enthalten in folgenden Worten: „Die Mathematik ist also der Inbegriff vieler Wissenschaften, von denen schon jede einzelne von sehr grofsem Umfange ist, und enthält daher einen Schatz von Erkenntnissen, deren Wichtigkeit und Nutzbarkeit wohl keiner weitläufigen Schilderung bedarf. Ihr Einflufs auf die Befriedigung unsrer wichtigsten Bedürfnisse und auf die Annehmlichkeiten und Bequemlichkeiten des menschlichen Lebens macht sie jeder cultivirten Nation achtungswürdig, und die Verbreitung ihrer Kenntnisse ist daher schon aus diesem Grunde reelle Beförderung des Menschenglücks. — Einem jeden Gelehrten aber ist ihre Kenntnifs, ohne einmal auf die besonderen Vortheile zu sehen, die

1) Vormbaum III, 91
2) Ebenda S. 246.

sie dem Theologen, Juristen, Arzneiverständigen, dem Geschichts- und Alterthumsforscher verschafft, schlechterdings unentbehrlich. Der Nutzen, den sie leistet, läfst sich hauptsächlich auf folgende Punkte bringen. 1. Sie liefert ihm einen Schatz von Wahrheiten, von denen er mit der vollkommensten Gewifsheit einsehen kann, dafs sie lauter Wahrheiten sind, und zwar solche, die er ohne alle Begriffe der Erfahrung blos aus sich selbst geschöpft hat. 2. Ohne Mathematik ist keine gründliche Kenntnifs der Natur möglich. Und die Physik . . kann sich nur dort einer vollkommenen Gewifsheit rühmen, wo sie Mathematik anwendet, die Vorgänge in Formeln kleidet. 3. Sie ist das geschickteste Mittel, sowohl unsern Geist zu erheben, als ihn vor thörichtem Eigendünkel zu bewahren, indem keine Wissenschaft fähiger ist, uns die menschliche Vernunft einestheils in ihrer wahren Gröfse und Würde darzustellen, anderntheils aber, uns ihre Schranken selbst da sichtbar zu machen, wo man die gröfste Leichtigkeit und Klarheit erwarten sollte. 4. Sie belohnt die Mühe, mit welcher man ihre Bekanntschaft sucht, schon reichlich durch das reine unschätzbare Vergnügen, das sie ihren Liebhabern gewährt. Dieses Zeugnifs hat ihr von jeher ein Jeder ihrer Kenner gegeben. 5. Ihr wichtigster Nutzen aber ist die Schärfung des Verstandes, und die Übung desselben im gründlichen Urtheilen, ja selbst im Erfinden. Neue Wahrheiten zu erfinden ist zwar nicht jedermanns Sache; aber desto angenehmer mufs es doch dem, der sich mit der Analysis bekannt gemacht hat, sein, wenn er sich wenigstens im Stande fühlt, verlangte Sätze, ohne zu wissen, ob sie bereits entdeckt sind, selbst zu erfinden. Schärfung des Verstandes aber und Übung im gründlichen Urtheilen ist unentbehrliches Bedürfnifs für jeden Studirenden. Allein diesen einem jeden Studirenden so nöthigen Vortheil kann ihm keine Wissenschaft in dem Grade verschaffen als die Mathematik. Denn da die Urtheilskraft überall Anschauung, folglich Klarheit und Evidenz zur Seite hat, so geht sie in der Anwendung der Regeln der Logik bei jedem Schritt sicher, folglich ist sie im Stande, jeden Fehlschlufs und jede Lücke, so versteckt sie immer sein mögen, sehr leicht zu entdecken. Auf diese Art gewöhnt sie sich unvermerkt immer mehr, wahre Einsicht von scheinbarer Täuschung mit Sicherheit zu unterscheiden, und so ist das Studium der Mathematik eine beständige und zwar die zuverlässigste praktische Logik, mithin die beste Schule für die Urtheilskraft. Dieser Vortheil aber wird noch destomehr durch die strenge Methode befördert, die sich aufser der Mathematik nirgends so genau und vollkommen anbringen läfst. Will man sich also denselben vollkommen verschaffen, so mufs man das Studium der Mathematik auch durchaus nach dieser strengen Methode unternehmen. Euklides wufste selbst Königen keinen Weg zur Geometrie zu ebnen, und in der That wird auch durch

jedes solches versuchte Ebnen des Weges, so angenehm es auch scheint, das Studium der Mathematik weit mehr erschwert als erleichtert. Es ist also nöthig, dafs man sich gleich anfangs von der mathematischen Methode eine richtige Vorstellung macht.“ [1])

Die Notwendigkeit zur Betonung des Nutzens mathematischer Kenntnisse für alle Kreise verbunden mit der Aufforderung zu eifriger Betreibung der Mathematik war begründet in der argen Vernachlässigung, welche das Studium dieser Wissenschaft von den Nichtfachgelehrten bis dahin erfahren hatte. Fast unglaublich klingen die Äufserungen, welche über die Unkenntnis der Mathematik in höheren Kreisen gethan wurden. Professor Thomasius habe behauptet, der Satz von der Winkelsumme im Dreiecke lasse sich nicht geometrisch beweisen.[2]) Professor Sturm in Frankfurt a. O. klagte, die Ausgaben für Tanzen und Fechten bezahle der Vater lieber als das mathematische Kolleg.[3]) „Wolf durfte von einer Wissenschaft, die dem gemeinen Haufen der Studenten und Professoren kaum dem Namen nach bekannt war, nur das Leichteste vortragen.“[4]) „Ich habe mich eines ganz leichten Vortrags bedient, auch alle höheren Rechnungen, sonderlich durch algebraische Zeichen vermieden, damit ein angehender Studiosus juris davor als vor Egyptischen Abenteuern nicht erschrecken möchte.“[5]) Da die lateinischen Schulen die praktische Rechenkunst unter ihrer Würde hielten, so verstanden die Inhaber der politischen Ämter, weil sie alle jene Schulen durchlaufen hatten, nichts vom Rechnen. Diese Ignoranten werden dafür in Schupps Regentenspiegel arg mitgenommen: „Wenn grofse Herren ihre Rechnungen lassen abhören, so wohnen sie gemeiniglich denselben nicht selbst bei, sondern deputiren dazu ein paar vom Adel und ein paar Doctores und Räthe. Solche Edelleute und Doctores wollen alsdann das Ansehen nicht haben, dafs sie das Einmaleins nicht wissen, sitzen da wie die guldnen Kälber zu Bethel, und lassen sich in die Nase vexieren, wenn summa summarum gemacht wird.“[6])

Aufser den mathematischen Vorlesungen für Fachmathematiker wurden auch solche für Studierende aller Fakultäten und solche für Juristen insbesondere eingeführt. Den mathematischen Vorlesungen für alle Fakultäten legte man ein halbes Jahrhundert lang Wolfs „Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften“ oder auch nur den „Auszug“ daraus zu Grunde. Über den Inhalt der mathematischen Vorlesungen für Juristen wird man

---

1) Murhard, System der Elemente 1798 S. 12 ff.
2) Polack, Mathesis Forensis 1740 Vorrede.
3) Leonh. Ch. Sturm, Kurtzer Begriff d. g. Mathesis 1710 V, Vorrede.
4) Kästner, Anfangsgründe d. Arithm., Geom., Trig. 1758 Vorrede.
5) Polack, Math. Forensis 1740 Vorrede.
6) Büchner, Kurtzer Entwurff 1719 S. 12.

aus den Werken von Polack[1]) und de Florencourt[2]) orientiert. Ersterer hat in der Ordnung der Pandekten geschrieben und aus der Arithmetik die Kapitel über die Progressionen, Erbschaftsteilung, Havarey- und Gesellschaftsrechnung, vom Konkurs und Rabatt aufgenommen. Der Inhalt des Werkes geht nicht über diejenigen Leistungen hinaus, die man heutzutage in einer guten Bürgerschule überall findet. Die beste Leistung von Büchern über juristische Rechenkunst sind die schon genannten Abhandlungen von C. Ch. de Florencourt. Der Verfasser, Professor in Göttingen, geht darin im Gebrauch der mathematischen Hilfsmittel bis an die Grenze der Differentialrechnung heran. Der Stoff umfafst: Zinseszins-, Rabatt-, Termin-, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mortalitätstabellen, Renten, Tontinen, Witwen-, Waisen-, Aussteuer-, Totenkassen und Assekuranzen. Die Entwickelungen sind durchgängig in allgemeinen Zahlen geführt.

§ 82. **Professoren, welche eifrig für die Ausbreitung der Mathematik und die Reform der Methode wirkten.** Auf dem Gebiete der Methodik vollzog sich ein völliger Umschwung; der Mechanismus wurde beseitigt, an seine Stelle trat die beweisführende Lehrart.

Die Gelehrten leiteten mit der Erneuerung der strengen mathematischen Methode die Reformbestrebungen ein. — Joh. Christoph Sturm[3]) war zuerst in dieser Richtung thätig und zwar durch Wort und Schrift. Seine „Mathesis Compendiaria, Altdorf 1670“ wurde auf vielen Universitäten den mathematischen Vorlesungen zu Grunde gelegt, und seine „Mathesis juvenilis 1699 und 1701“ war (im Auftrage des Nürnberger Rats) zur Hebung des mathematischen Unterrichts im Nürnberger Gymnasium verfafst. — Leonhard Christoph Sturm[4]), Sohn des vorigen, schrieb 1708: „Kurtzer Begriff der gesamten Mathesis“ (1710 2. Aufl.), welches Werk als mathematisches Kompendium für die Studierenden aller Fakultäten bestimmt war (das früheste in deutscher Sprache). Inhalt: „Universal-Mathesin; Wissenschaft der Zahlen, der Gröfse, des Mafses, der Schwere, der Bewegung; Algebra; Rechenkunst, Mefskunst, Militairbaukunst, Civilbaukunst, Artollerie, Mechanica, Astronomie, Geographie, Chronologie, Sonnenuhren, Optik, Perspective, Akustik, Tabellen.“

1) Polack, Mathesis Forensis 1730 und 1740.

2) Carl Chassot de Florencourt, Abhandlungen aus der jurist. u. polit. Rechenkunst 1781.

3) Geb. 1635 in der Pfalz, studierte in Jena Theologie und Mathematik, 1664 Pfarrer in Deiningen, 1669 Prof. d. Math. in Altdorf, wo er 1703 starb. — Doppelmayr S. 114.

4) Geb. 1669 zu Altdorf, studierte Theol., Math. und Baukunst, wurde 1694 Prof. d. Math. zu Wolfenbüttel, 1702 Prof. d. Math. zu Frankfurt a. O., 1711 Herzoglich Mecklenburgscher Baudirektor, 1719 starb er. — Doppelmayr S. 129.

Weit einflufsreicher als die beiden Sturme wirkte Christian Wolf.[1]) Durch eigne Erfindungen und Entdeckungen hat er seine Berühmtheit nicht erlangt, wohl aber brachte er diejenigen andrer in systematische Ordnung und machte sie dem Studium zugänglich. Für die Studierenden aller Fakultäten schrieb Wolf: „Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften, Halle 1710"; für die Anfänger einen: „Auszug aus den Anfangsgründen aller mathematischen Wissenschaften 1713"; für das mathematische Fachstudium: „Elementa Matheseos universae 1713" (1730 erschien die 9. Aufl.). Die in den „Elementa" zur Arithmetik gehörigen Kapitel umfassen: Definitionen, Zweck der Arithmetik, Operationszeichen, Numerieren, vier Species in ganzen Zahlen, Proportionen, gemeine Brüche, Radicieren mit Decimalbrüchen, Logarithmen, Decimalbrüche, Sexagesimalbrüche. Die Behandlung ist nach der synthetischen Methode eingerichtet. — Wolf hat durch seine Schriften den niedrigsten und höchsten Bedürfnissen entsprochen und mit seiner Methode und seinen Büchern die deutschen Hochschulen ein halbes Jahrhundert beherrscht. Selbst jenseits der deutschen Grenzen fand er durch Übersetzung der „Anfangsgründe" ins Holländische und Französische Anerkennung.

Abraham Gotthelf Kästner[2]), Mathematiker und Dichter, verdrängte mit seinen mathematischen Lehrbüchern die Wolfschen. Sie sind auch reichhaltiger und tiefer als die Wolfschen und nach der analytisch-synthetischen Methode eingerichtet. Die „Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie 1758" enthalten im arithmetischen Teile: Definition der Zahl, Ableitung der Species, vier Species mit Beweisen, Rechnen mit benannten Zahlen, Potenzen, Decimalbrüche, Sexagesimalrechnung, Radicieren, Proportionen, Regeldetri, Gesellschaftsrechnung, Kettenregel, Logarithmen. Wichtiger für uns ist Kästners: „Fortsetzung der Rechenkunst in Anwendung auf mancherley Geschäfte, Göttingen 1786", auf welches Werk wir unten zurückkommen.

Der für uns wichtigste Abschnitt in den Büchern von Sturm, Wolf und Kästner ist das Kapitel von der „mathematischen Lehrart". Es waren zwei Methoden in Gebrauch, die Synthesis und die Analysis. Sturm und Wolf hielten beide streng auseinander, während Kästner ihre Verschmelzung zur analytisch-synthetischen Methode zum Vortrage der Anfangsgründe der Wissenschaften für die bequemste Unterrichtsweise hielt. — In der Syn-

1) Geboren 1679 zu Breslau, 1706 Professor der Mathematik zu Halle, 1703 von hier vertrieben (ging nach Marburg), Friedrich II. rief ihn nach Halle zurück, wo er 1754 starb.

2) Geboren 1719 zu Leipzig, gest. 1800 als Prof. zu Göttingen, war der fruchtbarste math. Schriftsteller seines Jahrhunderts. — Siehe den Katalog bei Poggendorf. Vgl. Allgem. deutsche Biogr. XV, 439—451.

thesis herrscht folgende Ordnung: Axiome, Postulate, Nominal- und Realdefinitionen, Lehrsätze, Folgerungen, Zusätze. — Die Analysis beschreitet folgenden Weg: sie stellt ein Problem, geht zur Denomination über (d. i. zur Erwägung der Umstände und Ersetzung der Gröfsen durch algebraische Zeichen), stellt die Gleichung auf, reduciert und löst diese; zuletzt folgt die Konstruktion des gefundenen Resultats.

Wolf begnügte sich aber nicht allein mit dem Vortrag der beweisführenden Methode, sondern wufste diese Art auch überzeugend zu verfechten. Er schreibt[1]): „Es ist nicht genug, dafs der Lehrer die Wahrheit sagt, sondern die Schüler müssen auch begreifen, dafs es Wahrheit sei. Es ist aber ohne Erinnern klar, dafs man den Nutzen von der Mathematik nicht zu erwarten hat, wenn nicht die von den alten Geometris gebrauchte „Lehrart“ in allem auf das sorgfältigste in acht genommen wird. Denn nicht die mathematische Wahrheit, sondern die Ordnung, in welcher sie gründlich erkannt wird, ist das Mittel, wodurch der Verstand des Menschen geändert wird. Daher fällt der Nutzen der Mathematik weg, wenn man ihre Lehren auf gemeine Art vorträgt, nach welcher sie mehr in das Gedächtnifs als in den Verstand gefafst werden. Man mufs nicht allein in der Erklärung der Rechenkunst die Regeln zeigen, nach welchen man die verlangten Zahlen finden kann, sondern man mufs auch deutlich begreifen, warum durch selbige Regeln die verlangten Zahlen können gefunden werden. — Die Schüler müssen allezeit gefragt werden, warum sie dieses so und nicht anders machen, damit sie nicht allein den Grund der Rechnung einsehen und sie daher besser behalten, sondern auch gewöhnt werden, Nichts ohne Grund von Jemand anzunehmen, ingleichen in Allem, was sie sehen und hören, um seinen Grund sich zu bekümmern.“

Auch Kästner wufste treffliche Gründe für die beweisführende Methode anzugeben: „Vorschriften, denen man folgt, ohne ihre Gründe zu wissen, können an sich unrichtig sein, wenn unser Lehrer nicht Einsicht oder Aufrichtigkeit genug hat. Sind sie auch richtig, so können wir bei ihrer Anwendung fehlen, weil wir ihre rechte Bedeutung und ihre Grenzen nicht zu bestimmen wissen; und endlich wird es uns allzeit schwerer, wenn wir sie blos im Gedächtnisse behalten sollen, als wenn wir die Verbindung mit ihren Gründen durch den Verstand einsehen. — Die mathematische Methode ist die einzige, die zur Gewifsheit führt, und man hat sich ihrer zu bedienen, wenn man vor Irrthümern sicher sein will. Das Wesentliche derselben besteht darin, Alles was man lehrt aus Gründen, deren Wahrheit ungezweifelt ist, durch Schlüsse, deren Richtigkeit den Verstand zum Beifall zwingt, darzuthun.“[2]) „In die Ausübung mathematischer

1) Auszug aus den Anfangsgründen . . 1713.
2) Kästner, Anfangsgründe der Arithm. . . . 1758 S. 9.

Lehren wird sich schwerlich jemand allemal gehörig finden, der nicht Nachdenken genug gehabt hat, die Gründe von ihnen einzusehen. Denn einen mathematischen Satz nur auswendig wissen, heifst nichts mehr, als sonst eine Wahrheit oder ein Märchen im Gedächtnisse haben."[1])

Gleichen oder doch ähnlichen Inhalts sind die Vorreden fast aller mathematischen Lehrbücher im 18. Jahrhundert.

§ 83. **Die formalbildende Kraft des mathematischen Unterrichts.** Mit Einführung der streng beweisführenden Methode wurde dem mathematischen Unterricht in allen Zweigen ein neuer bisher ungekannter Nutzen, die formalbildende Kraft, abgewonnen. In guten Rechenbüchern ist die genügende Hervorhebung und Würdigung dieses Nutzens auch nicht versäumt. „Es ist bekannt, dafs die Arithmetik in allen Rechenbüchern als ein Gedächtniswerk getrieben wird, welches man aus der blofsen Übung lernt, ohne den Grund der Regeln zu verstehen. Allein diese Lehrart hat mir allzeit sehr seichte geschienen und daher habe ich geglaubt, dafs man im Unterrichte von der Rechenkunst vornehmlich auf den Verstand zu sehen habe. Dieser empfindet nun ein grofs Vergnügen, wenn er ein Ding aus dem Grunde verstehen lernt und begreifen kann, warum man durch diese Regeln ein solch Exempel auflösen könne und wie man auf solche Regeln gekommen sei."[2])

Joh. Georg Gotth. Hübsch (Mathematicus in Pforta) nannte die Schärfung des Verstandes einen der Nebenzwecke des mathematischen Unterrichts; „denn die Rechenkunst ist wie ein Schleif- oder Wetzstein, und man lernt distinct, ordentlich und vorsichtig denken."[3]) — „Die Arithmetik ist eine reine Vernunftwissenschaft. Bei allen reinen Vernunftschlüssen sollte man, wo nicht mehr, doch zum mindesten ebensoviel auf den formalen als auf den materiellen Nutzen sehen, den die Beschäftigung mit derselben verschafft."[4])

§ 84. **Arten der mathematischen Lehrbücher.** Die mathematischen Lehrbücher scheiden sich in drei Klassen. Zur ersten gehören die Kompendien[5]) zum Gebrauche auf Universitäten und zwar giebt es solche für Mathematiker von Fach und solche für Nichtmathematiker. Die zweite Klasse bilden die Lehrbücher[6]) zum Gebrauche auf höheren Schulen, den Vorbereitungsanstalten für die Universitäten. Die dritte Klasse umfafst die

1) de Florencourt, Abhandlungen . . . 1781, S. II der Vorrede, welche von Kästner ist.

2) Clausberg, Demonstrative Rechenkunst . . 1732, Vorrede.

3) J. G. G. Hübsch, Arithmetica portensis 1748.

4) Hauff, Lehrbuch d. Arithmetik.

5) Titel bei Murhard I, 59—81.

6) Titel ebenda S. 210 ff.

Rechenbücher für den Handelsstand und die niederen Schulen, es dominieren darin die kaufmännischen und ökonomischen Rechnungen.

Auch in den Büchertiteln kam die Reform zum Ausdrucke. Während bisher das Rechnen „geschwinde und behende“, „leicht und kurz“, oder „unterhaltend und mit allerlei hübschen Regeln“ auf den Büchertiteln angepriesen wurde, so wollten es die „Anweisungen“, „Anleitungen“, „Wegweiser“ etc. nun vor allem „deutlich“, „gründlich“ und „vernünftig“ lehren.

Bezüglich der Form der Abfassung arithmetischer Lehrbücher für die lateinischen Schulen wurden durchgängig Wolfs Schriften nachgeahmt, auch wenn man es nicht ausdrücklich auf dem Titel vermerkt findet. An die Stelle der Regeln traten nun Lehrsätze mit Beweisen, resp. Vorschriften mit Begründung.

§ 85. **Der arithmetische Stoff für kaufmännische Kreise.** Wir können den arithmetischen Stoff in seinem neuen Gewande nicht besser vorführen, als wenn wir uns etwas eingehend über Clausbergs[1]) „Demonstrative Rechenkunst“ (1732 1. Aufl., 1772 4. Aufl.) verbreiten. Um aber keine irrtümliche Vorstellung aufkommen zu lassen, sei bemerkt, daſs damit nicht die Schularithmetik charakterisiert wird, sondern die echt kaufmännische. Die lateinischen und deutschen Schulen standen mit ihren arithmetischen Leistungen auf einem weit tieferen Niveau. Clausbergs Rechenwerk galt als das vorzüglichste des ganzen Jahrhunderts, kein Konkurrent macht dem Verfasser diesen Ruhm streitig, und wer sich etwas zu gute thun wollte, sagte, er habe den Clausberg durchgerechnet. Von einer gewissen Weitläufigkeit kann man das Werk nicht freisprechen — es hat den ganz respektabeln Umfang von 1520 Seiten —; Hübsch warf dem Verfasser gelehrte Eitelkeit vor: Clausberg habe zwar vieles, was zum Nachdenken Gelegenheit gebe, allein er künstle meist in den Vorteilen, nur um sein Ingenium sehen zu lassen. Man kann das Buch ein ausreichendes Übungsbuch, eine gründliche Anleitung für den Informator und einen Wegweiser für den Selbstunterricht nennen. Jedes Exempel ist mit vollständiger Durchrechnung und Beweis versehen. Die Aufgaben sind weder erfundene noch entlehnte, sondern solche, „die ich bei berühmten Kaufleuten selbst unter den Händen gehabt“. — Als zweckmäſsigste Art

1) Christlieb von Clausberg, geb. 1689 zu Danzig, Israelit, zu Clausthal getauft, erteilte Unterricht in hebräischer Sprache und kaufmännischer Rechenkunst in Danzig, Leipzig, Hamburg, Lübeck. 1733 wurde er dänischer Staatsrat und Revisor der Königl. Privatkasse. Nach Christian VI. Tode 1746, welcher viele Schulden gemacht hatte, wurde Clausberg entlassen. Er starb 1751 in Kopenhagen. Vgl. Jöcher, Allgem. Gelehrtenlexikon 1750 I, 1944. Desgl. Dunkel, Histor. krit. Nachr. von verstorb. Gelehrten II, 627. Desgl. Allgem. deutsche Biogr. IV, 285.

der Benutzung schlägt Clausberg selbst folgende vor: „Beginne mit den Exempeln, gehe dann zurück zu den allgemeinen Regeln und willst du mehr als rechnen lernen, so siehe die Beweise und Gründe an.“ Noch heute herrscht in der Methode die gleiche Ordnung. — Das Werk hat vier Teile.

Der I. Teil enthält die vier Species in ganzen und gebrochenen Zahlen und die Regeldetri. Die Einleitung beginnt mit der Entstehung des Zahlbegriffs und leitet aus der Veränderlichkeit der Zahlenwerte die vier Species ab. Das Numerieren lehrt den Aufbau des dekadischen Zahlensystems aufwärts und abwärts der Einheit. Das Dividieren geschieht unterwärts ohne Anschreibung der abzuziehenden Produkte. Die Regeldetri ist auf die Proportion gegründet, doch möge man wegen der Vertauschbarkeit der mittlern Glieder den Ansatz bilden, wie man spricht. — In der Einleitung zu den Species mit gemeinen Brüchen ist über Entstehung, Wertvergleichung, Erweitern, Kürzen und Resolvieren gehandelt. Die bekannte Multiplikationsregel zweier Brüche wird so behandelt: „Wenn ein Faktor weniger als 1 ist, so wird nicht der ganze andre Faktor, sondern nur ein Teil desselben verlangt.“ Die Divisionsregel gleichnamiger Brüche wird auf den Satz gegründet, dafs in der Fortlassung der Nenner eine Multiplikation beider Brüche mit derselben Zahl liegt, wodurch der Quotient keine Änderung erleidet. Die Umkehrungsregel wird aus ebengenannter Regel abgeleitet. Für die Regeldetri mit Brüchen ist nur eine Anleitung zur Beseitigung der Brüche nötig, was durch Multiplikation zwei betreffender Glieder mit derselben Zahl geschieht. Über die Zulässigkeit dieser Multiplikation wird der gehörige Proportionssatz angezogen.

Der II. Teil enthält „die Rechnungsvorteile“ oder „Practica“. Praktika definiert er als eine Anweisung, das Resultat auf einem kürzeren oder leichteren Wege zu finden als das gewöhnliche Verfahren ist. Kürzer ist der Weg, der weniger Ziffern schreibt; leichter ist der, welcher statt der Multiplikation und Division die Addition resp. Subtraktion, statt der Division die Multiplikation etc. anbringt, oder welcher die Brüche vermeidet oder die Rechnung mit kleineren als den gegebenen Zahlen ausführt, mit einem Worte: welcher die Operation bequemer macht.

Da bei den Additionen und Subtraktionen keine Zwischenrechnungen vorkommen, so sind kaum bequemere Wege zu entdecken, es beschränkt sich die Praktik wesentlich auf die Multiplikation, Division, Regeldetri und höhere Rechnungen.

Das Auffinden von Vorteilen beruht auf der Kenntnis der Eigenschaften von den Zahlen, weshalb Clausberg erst davon handelt: von Primzahlen, Faktorenzerlegung, Teilbarkeit etc. Das wertlose Kennzeichen für die Teilbarkeit einer Zahl durch 7, welches wir § 48 anführten, hat

Clausberg ein wenig vereinfacht. — Ein andres ebenfalls wertloses ist folgendes: „Eine Zahl ist durch 7 teilbar, wenn der Unterschied ihrer doppelten Einer und der ihnen voranstehenden Zahl durch 7 teilbar ist.“[1]) Die Operation subtrahiert ein Siebenerprodukt (das 21fache der Einer) von der vorgelegten Zahl und prüft dann den 10ten Teil des Restes auf seine Teilbarkeit durch 7. — Wollte man dieses Princip durchführen, so ließen sich noch mehr Kennzeichen für 7 und auch solche für andre Zahlen angeben; für 7: man subtrahiere das $(2 + 7n)$fache der Einer von dem voranstehenden Teile der Zahl; für 13 mufs das $(9 + 13n)$fache der Einer subtrahiert werden, für 17 das $(5 + 17n)$fache der Einer.

Von praktischem Werte ist folgendes, weil es zugleich über die Teilbarkeit durch 7, 11 und 13 entscheidet: Bei vier- bis sechsstelligen Zahlen subtrahiere man von den drei letzten Stellen den voranstehenden Teil der Zahl; ist der Rest durch 7, 11 oder 13 teilbar, so auch die Zahl. Beispiel: 456 967; $967 - 456 = 511$; 511 ist durch 7 teilbar, folglich auch 456 967. Die Operation zieht das 1001 fache des links von den Hunderten stehenden Teils von der gelegten Zahl ab. Da nun $1001n = 7 \cdot 11 \cdot 13n$, so ist die vorgelegte Zahl durch 7, 11 oder 13 teilbar, falls es der Rest ist. Betragen die vorderen drei Stellen mehr als die hinteren drei (z. B. 967 456), oder hat die Zahl mehr als sechs Stellen, so ziehe man die drei letzten Stellen von dem vorderen Teile ab $(967 - 456 = 511)$ und prüfe den Rest wie vorher. In diesem Falle wird von der gegebenen Zahl das 1001fache ihrer drei letzten Stellen subtrahiert und nur $\frac{1}{1000}$ des Restes untersucht.

Unter den Vorteilen für die Multiplikation ist eine sehr praktische Methode von Interesse und zwar insofern, als sie eine Ausdehnung der (§ 45) angeführten Einmaleinsregel auf mehr als einstellige Faktoren ist. Verfahren: Man suche die Komplemente der Faktoren und der nächsthöheren Zehnerpotenz, addiere die Faktoren, multipliciere diese Summe mit der betr. Zehnerpotenz, lasse aus dem Produkte die höchste Stelle fort und addiere das Produkt der beiden Komplemente. (Beide Faktoren müssen gleichviel Stellen haben.)

| Faktoren | Kompl. | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 83 | 17 | 986 | 14 | 9976 | 24 |
| 99 | 1 | 997 | 3 | 9991 | 9 |
| 8217 | | 983 042 | | 99670216 | |

Nachweis. Sind $a$ und $b$ die Faktoren, $\alpha$ und $\beta$ die Komplemente und $n$ die Zehnerpotenz, sodafs man also hat:

1) Hoffmanns Zeitschrift für math. Unterr. 1871 S. 337.

$$a = n - \alpha$$
$$b = n - \beta$$

so ist
$$a + b = 2n - (\alpha + \beta)$$
$$(a + b)n = 2n^2 - (\alpha + \beta)n$$
$$\alpha\beta + (a + b)n = 2n^2 - (\alpha + \beta)n + \alpha\beta$$
$$-n^2 + (a + b)n + \alpha\beta = n^2 - (\alpha + \beta)n + \alpha\beta.$$

Da nun aber
$$ab = (n - \alpha)(n - \beta) = n^2 - (\alpha + \beta)n + \alpha\beta$$

so ist auch
$$-n^2 + (a + b)n + \alpha\beta = ab.$$

Die linke Seite der letzten Gleichung enthält das obige Verfahren.

Zusatz. Die Formel behält ganz dieselbe Gestalt, auch wenn $a$ und $b$ beide gröfser sind als $n$, wenn also $\alpha$ und $\beta$ das positive Vorzeichen haben. Haben $\alpha$ und $\beta$ ungleiche Vorzeichen, so wird das Produkt $\alpha\beta$ negativ. In beiden Fällen ist $n^2$ nicht immer identisch mit der „höchsten Stelle"; man darf dann diese nicht ganz fortlassen, sondern nur $n^2$ subtrahieren, wie es die Formel vorschreibt.

Erleichtert wird eine Multiplikation dann, wenn sie in der Hauptsache auf eine Division durch eine kleine Zahl zurückgeführt werden kann, was durch Umformung des einen Faktors in einen uneigentlichen oder unechten Bruch geschieht $\left[25 = \frac{100}{4};\ 333\frac{1}{3} = \frac{1000}{3}\right]$. Am gröfsten ist dieser Vorteil, sobald der Zähler des fraglichen Bruches eine Zehnerpotenz wird. Die hierzu passenden Zahlen hat Clausberg tabellarisch zusammengestellt und erschöpfend vorgeführt.

| | aus 10 | aus 100 | aus 1000 | aus 10000 |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | 5 | 50 | 500 | 5000 |
| $\frac{1}{3}$ | $3\frac{1}{3}$ | $33\frac{1}{3}$ | $333\frac{1}{3}$ | $3333\frac{1}{3}$ |
| $\frac{1}{4}$ | $2\frac{1}{2}$ | 25 | 250 | 2500 |
| $\frac{1}{5}$ | 2 | 20 | 200 | 2000 |
| $\frac{1}{6}$ | $1\frac{2}{3}$ | $16\frac{2}{3}$ | $166\frac{2}{3}$ | $1666\frac{2}{3}$ |
| $\frac{1}{7}$ | $1\frac{3}{7}$ | $14\frac{2}{7}$ | $142\frac{6}{7}$ | $1428\frac{4}{7}$ |
| $\frac{1}{8}$ | $1\frac{1}{4}$ | $12\frac{1}{2}$ | 125 | 1250 |
| $\frac{1}{9}$ | $1\frac{1}{9}$ | $11\frac{1}{9}$ | $111\frac{1}{9}$ | $1111\frac{1}{9}$ |
| $\frac{1}{11}$ | $\frac{10}{11}$ | $9\frac{1}{11}$ | $90\frac{10}{11}$ | $909\frac{1}{11}$ |

Tritt eine Zahl aus der Tabelle als Faktor aus, so wird mit der Kopfzahl multipliciert und durch den Nenner des vornstehenden Bruches dividiert. — Geringer wird der ebengenannte Vorteil dann, wenn der fragliche Bruch nicht mehr eine reine Zehnerpotenz, sondern einen beliebiger Zehner, Hunderter, Tausender etc. zum Zähler hat, weil dann die

Multiplikation nicht allein durch Anhängung von Nullen vollzogen werden kann. Clausberg hat für jeden Zehner, Hunderter und Tausender eine Tabelle wie die obige hergestellt.

In benannten Zahlen gewinnt man zuweilen Vorteile durch Verwandlung kleinerer Sorten in Brüche der höheren; 348 Thlr. 5 gr. $\times$ 29 = $348\frac{1}{6}$ Thlr. $\times$ 29.

Die Ermittelung des Produkts kann in manchen Fällen der Hauptsache nach auch durch eine leichte Subtraktion geschehen; zu diesem Zwecke mufs sich der eine Faktor in eine bequeme Differenz umformen lassen; z. B.

$$876 \times 98 = 876\,(100 - 2);\quad 28 \text{ ngr.} \times 9 = (1 \text{ Thlr.} - 2 \text{ ngr.})\; 9;$$
$$8649 \times 9\tfrac{8}{9} = 8649\,(10 - \tfrac{1}{9}).$$

Die multiplicierte Zerstreuung kommt zur Anwendung, wenn der eine Faktor in einstellige Faktoren zerlegbar ist; $523 \times 420 = 523 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 10$.

Die addierte Zerstreuung, d. i. die eigentliche welsche Praktik, zerlegt den einen Faktor in eine Anzahl zur Rechnung bequeme Summanden;

$$116\frac{2}{3} = 100 + \frac{100}{6};\quad 13\frac{1}{3} = 10 + \frac{10}{3};\quad 251 = \frac{1000}{4} + 1.$$

Aufg. 5103 $\times$ 1253 Ausr. 637875 . . . das sind $\frac{10}{8}$ aus dem Tsdfachen
15309 . . das ist das Dreifache
6394059

Um die Zerstreuungen für benannte Zahlen einzuüben, sind Tabellen entworfen, in denen jede Anzahl von ngr. [etc. andere Sorten] durch eine Summe von fl-Brüchen etc. ausgedrückt ist, welche teils auf die Einheit, teils auf einander proportioniert sind.

$$23 \text{ ngr.} = \begin{cases} 15 & \frac{1}{2} \text{ fl} \\ 5 & \frac{1}{6} \text{ fl} \\ 3 & \frac{1}{10} \text{ fl} \end{cases} \qquad 21 \text{ ngr.} = \begin{cases} 15 & \frac{1}{2} \text{ fl} \\ 5 & \frac{1}{3} \text{ von } \frac{1}{2} \text{ fl} \\ 1 & \frac{1}{5} \text{ von } \frac{1}{3} \text{ von } \frac{1}{2} \text{ fl.} \end{cases}$$

Die Vorteile in der Division. 1. Läfst sich der Divisor in einstellige Faktoren zerlegen, so kann die verlangte eine Division durch mehrere auf einander folgende ausgeführt werden.

2. Kann der Divisor in einen Bruch $\left(\frac{m}{10^n}\right)$ mit einem bequemen Nenner (von der Form $10^n$) umgeformt werden, so wird dann die Division selbst der Hauptsache nach in eine leichte Multiplikation übergeführt; z. B. $89\,475 : 25 = 89\,475 \cdot \frac{4}{100}$.

3. Sehr erheblich können die Vorteile werden, wenn statt des gegebenen Divisors ein Hilfsdivisor eingeführt, d. h. wenn mit dem dekadischen Komplemente dividiert wird. — Hierzu hat Clausberg im wesentlichen zwei verschiedene Methoden angegeben.

a) Der ersten Methode, anwendbar auf solche Fälle, in denen der gegebene Divisor nur um einen Einer kleiner als eine reine ganze Zehnerpotenz [97, 994] ist, liegt die Entwickelung zu Grunde:

$$\frac{a}{d-n} = \frac{a}{d} + \frac{an}{d^2} + \frac{an^2}{d^3} + \frac{an^3}{d^4} + \ldots \text{ in inf.,}$$

worin $a$ den Dividend, $d$ den Hilfsdivisor [von der Form $10^m$] und $n$ das dekadische Komplement bedeutet. In Ziffern stellt sich die Ausführung folgendermafsen dar. Beispiel: 379 681 : 97

| | | | |
|---|---|---|---|
| 100 — 3 | 3796 | 81 | |
| | 113 | 88 | .... das ist 3796 × 3 |
| | 3 | 39 | .... das ist 113 × 3 |
| | | 9 | .... das ist 3 × 3 |
| | 3914 | 17 | |
| | | 6 | |
| | 3914 | Rest 23 | |

Zur Erklärung: die Ziffern hinter dem Striche sind bei der Addition wie Decimalteile zu behandeln, sie stellen im Resultate den Rest vor, der noch zu berichtigen ist, sobald eine Ziffer aus der Kolonne hinter dem Striche vor denselben kommt. In diesem Beispiele durch 2 · 3, weil 2 vor den Strich gekommen und 3 das Komplement ist.

b) Die zweite Methode operiert in der bekannten algebraischen Weise. Ausführung: Man ermittelt jede Quotientenziffer nach gewöhnlicher Art, die Multiplikation des gegebenen Divisors unterbleibt, die Subtraktion des unbekannten Produkts besteht in der Fortlassung der höchsten Stelle vom Teildividenden und der Addition des Produkts aus Quotientenziffer mal dem Komplemente (Beispiel b).

c) Ist der Hilfsdivisor nicht von der Form $10^n$, sondern von der Form $m\,10^n$, so bleibt das Schema ganz dasselbe, nur kann dann die Subtraktion der $n$fachen des Hilfsdivisors nicht schon durch Fortlassung der höchsten Teildividendenziffer geschehen. Beispiel c): Man addiert 4 · 2 = 8 zu 3789 und subtrahiert darnach 4 · 800 von 3797, Rest 597 etc.

Beispiel b) 22 987 822 : 997

22987822 : (1000 — 3) = 23 056
3047
5682
6972
990 Rest

Beispiel c) 3 789 546 : 798

3789546 : (800 — 2) = 4748
5975
3894
7026
642 Rest.

Vorstehende Methode ist römischen Ursprungs und schon bei Boetius[1]) zu finden. In Crelles Journal[2]) stehen allgemeine Beweise dazu.

Zu verwundern bleibt, dafs diese höchst praktische komplementäre Division gegenwärtig nicht geübt wird. In der „Sächsischen Schulzeitung“[3]) haben wir sie wieder ans Licht gezogen und dabei dargethan, für welche Divisoren sie vorteilhafter ist als die gewöhnliche Methode. Bei Divisoren mit Nullen in der Mitte (507, 9002, 8082 etc.) ist fast in allen Fällen die gewöhnliche Division vorteilhafter. Bei den Divisoren ohne Nullen entscheidet in der Regel die Gröfse des Komplements; je kleiner dasselbe ist (1 bei 999, 799, 199 etc., 2 bei 998, 898 etc.), desto vorteilhafter ist die komplementäre Division. Die unbequemsten Divisoren (unter den dreistelligen Zahlen) für die komplementäre Division[4]) sind 111, 211... 911, weil sie das gröfste Komplement 89 haben. 1 und 89 sind demnach die Grenzen der Komplemente aller dreistelligen Divisoren ohne Nullen. Je näher nun das Komplement der unteren Grenze 1 liegt, desto vorteilhafter ist die komplementäre Division; je näher es der oberen Grenze 89 liegt, desto vorteilhafter ist die gewöhnliche Methode; je mehr es sich dem arithmetischen Mittel $\frac{1+89}{2} = 45$ nähert, desto mehr verringert sich der Vorteil, den die eine Methode vor der andern gewährt.

Ein Divisor, welcher um $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ... $\frac{1}{9}$ seines Betrages kleiner ist als eine Zehnerpotenz, kann in diese selbst umgeformt werden, indem man den betr. Bruchteil addiert. Diese Addition macht auch eine Vermehrung des Dividenden um denselben Bruchteil seines Betrags nötig. Beispiel: $268415 : 87\frac{1}{2} = 306760 : 100$. Erklärung: $87\frac{1}{2}$ ist $12\frac{1}{2}$ kleiner als 100. $12\frac{1}{2}$ ist der siebente Teil von $87\frac{1}{2}$; man hat also 268 415 um seinen siebenten Teil 38 345 zu vermehren und dann zwei Stellen abzuschneiden. Oder allgemein, wenn $D$ den Dividend und $d$ den Divisor bedeutet, ist $D : d = \left(1 + \frac{1}{n}\right) D : \left(1 + \frac{1}{n}\right) d$.

Die Umformung des Dividenden und Divisors ist in gleicher Weise auch durch Subtraktion thunlich, es ist auch $D : d = \left(1 - \frac{1}{n}\right) D : \left(1 - \frac{1}{n}\right) d$; in Ziffern $2728 : 13\frac{1}{3}$; von 2728 wird der vierte Teil (682) abgezogen, bleiben 2046, und dieser Rest durch 10 dividiert, also 204,6.

In so grofser Menge, solch systematischer Ordnung und mit so klarer

1) Friedlein, Boetii de institutione Arithmetica ... 1867 S. 399 ff. Desgl. Cantor, Vorlesungen I, 495.

2) Crelle, Journal f. reine u. angew. Math. Bd. 52.

3) Jahrgang 1884 Nr. 10.

4) Weifsenborn führt sie (Entwickelung des Zifferrechnens 1877) mit dem unbequemen Divisor 123 vor.

Begründung die Rechnungsvorteile vorgeführt zu haben, kann keinem zweiten Autor vor noch nach Clausberg nachgerühmt werden.

Der III. und IV. Teil enthalten die kaufmännischen Rechnungsarten. Unter den Ansätzen ist die Kettenregel stark bevorzugt und mit einem arithmetischen und algebraischen Beweise ausgestattet, trotzdem daſs sie garnicht zum Beweisen angelegt ist.

III. Teil. Wechselrechnung. Einleitungsweise ist das Nötigste über Wesen und Zweck des Wechsels und die beteiligten Personen (Remittent, Trassant, Präsentant, Acceptant, Giranten) erwähnt.

Der ganze Stoff ist in sechs Abteilungen gebracht, von denen die erste die einfachen und zusammengesetzten Reduktionen ohne und mit Spesen behandelt. Wir reproducieren ein Beispiel mit Spesen: „Danzig trassirt auf Amsterdam 3000 fl Pol à 286 ngr. für 1 L Vlaems. Der Wechsel wird in Amsterdam protestirt, der Amsterdamer Inhaber trassirt deshalb Capital und Spesen zurück auf Danzig à 291 ngr. Es werden folgende Spesen berechnet, Court. 1‰, Prov. $\frac{1}{2}$%, Protestkosten 50 Stüb. Cour., Porto 18 Stüb. Cour. Wieviel ist in Danzig wieder zu zahlen?“ (1 L Vls = 6 fl Holl. à 20 Stüb. Banco.)

$x$ fl Holl Banco = 3000 fl Pol Danz. Tratte
1 fl = 30 gr. Pol
286 gr = 6 fl Holl B°.

143 in 27000 fac. 1888 fl 2 Stüb. B° ca in Amsterd. an Capital
1 - 18 - Courtage von 1888 fl
9 - 9 - Prov. ÷
3 - 5 - Porto u. Protestk. 68 Stüb. Cour. thut 3 fl 5 Stüb. B°.

1902 fl 14 Stüb. B°. = 38054 Stüb. B°.

Also für die Amsterdamer Tratte:

$x$ fl Pol = 38054 Stüb. B°
120 Stüb = 291 gr. Pol
30 gr. = 1 fl Pol

600 in 1845619 fac. 3076 fl 1 gr. Pol ist in Danzig wieder zu zahlen.

In der zweiten Abteilung ist gelehrt: Gewinn und Verlust beim Wechselhandel a) an der ganzen Summe, b) am Kurs, c) in Procenten zu berechnen. Dabei ist ein „Hin- und Rückwechsel“ nötig, man muſs sein ausgelegtes Geld wieder empfangen, oder empfangenes wieder auszahlen, wodurch erst Gewinn oder Verlust entstehen kann. Die Spesen wirken auf den Gewinn vermindernd, auf den Verlust vermehrend.

Die dritte Abteilung handelt von den Wechselarbitragen. Unter mehreren für denselben Zweck vorhandenen Wegen wird der günstigste oder

schädlichste ermittelt. Um den gewünschten Aufschlufs zu erhalten, müssen die Resultate der einzelnen Wege insonderheit ermittelt und dann unter einander verglichen werden. Von selbst ist klar, dafs beim Empfangen der Weg der nützlichste ist, auf dem man am meisten erhält; während beim Geben derjenige der beste ist, auf dem man das wenigste giebt. Vier Fälle unterscheidet man in der Arbitrage: a) die Ermittelung des günstigsten Weges ohne Rücksicht auf die Gröfse des Nutzens oder Schadens; b) die Berechnung des Unterschieds der vorhandenen Wege an der ganzen Wechselsumme, c) am Kurs, d) nach Procenten. Mit der Entscheidung einer der drei letzten Fälle entscheidet man auch den ersten.

Durch die Wechselkommissionsrechnungen in der vierten Abteilung ist gelehrt, wie weit ein Kommissionär, welcher nach einem vorgeschriebenen Kurse zu remittieren und trassieren beordert ist, von diesen Kursen abgehen kann, damit der Ordre gleichwohl Genüge geschieht. Gewöhnlich findet der Kommissionär fürs Remittieren und Trassieren andre als die vorgeschriebenen Kurse und mufs untersuchen, ob der Auftrag nach veränderten Kursen ohne Nachteil des Kommittenten ausführbar ist. Diese Rechnungen erfordern viel Aufmerksamkeit, weil ein und derselbe Kurs für das eine Geschäft schädlich und für das andre vorteilhaft wirkt. Ist nämlich die feste Valuta am Orte des Kommissionärs, so wirkt fürs Trassieren der hohe Kurs schädlich, fürs Remittieren aber nützlich; ist jedoch die veränderliche Valuta am Orte des Kommissionärs, so wirkt im Trassieren ein hoher Kurs zum Nutzen, im Remittieren zum Schaden. Zur Vermeidung von Irrtümern im Ansatze empfiehlt Clausberg dem Rechner, sich bei jedem Geschäft die Frage vorzulegen: wieviel empfange ich? wieviel gebe ich?

Findet der Kommissionär beide Kurse so verändert, dafs beide schädlich oder beide nützlich wirken, so ist eine Rechnung nicht erst nötig; sie ist nur dann anzustellen, wenn der eine Kurs nützlich, der andre schädlich wirkt. Beispiel: Vorgeschrieben sind die Kurse $77\frac{1}{2}$ und $101\frac{1}{4}$; der Kommissionär findet 78 und $101\frac{3}{4}$; erstre Veränderung $\frac{1}{2}$ wirkt schädlich, zweite $\frac{1}{2}$ wirkt zum Nutzen. Da nun die Differenzen gleich sind, so würden Nutzen und Schaden sich ausgleichen, falls die Zahlen, durch welche sie verursacht sind, gleich wären. Da der Schaden von der kleineren Zahl herrührt, so wäre er bei einer gröfseren Zahl gröfser, folglich ist der Auftrag nicht ausführbar.

Unter mehreren zu demselben Zwecke gegebenen Wegen den vorteilhaftesten zu finden, bediente sich Clausberg einer selbst erfundenen sehr praktischen Methode. Beispiel: „Augsburg erhält Ordre entweder nach Amsterdam à $107\frac{1}{4}$, oder nach Hamburg à $106\frac{1}{4}$, oder nach Venedig à $91\frac{1}{4}$, oder nach Leipzig à $100\frac{3}{4}$ zu remittieren; jedoch dahin, wo es

am besten sei. Wenn nun Augsburg nicht anders als zu $108\frac{1}{4}$ per Amsterdam, oder zu 107 per Hamburg, oder zu 92 per Venedig, oder zu $101\frac{1}{2}$ per Leipzig remittieren kann, und also alle diese Wege Schaden bringen, so wird gefragt, auf welchem Wege der kleinste Schaden entsteht."

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| per Amsterdam | $107\frac{1}{4}$ | diff. 1 | $321\frac{3}{4}$ | diff. 3 |
| „ Hamburg | $106\frac{1}{4}$ | diff. $\frac{3}{4}$ | 425 | diff. 3 |
| „ Venedig | $91\frac{1}{4}$ | diff. $\frac{3}{4}$ | | |
| „ Leipzig | $100\frac{3}{4}$ | diff. $\frac{3}{4}$ | | |

Da Hamburg, Venedig und Leipzig dieselben Differenzen $\frac{3}{4}$ haben, so ist der Hamburger Weg am wenigsten schädlich, weil er die gröfste Zahl $106\frac{1}{4}$ hat. Es sind also nur der Amsterdamer und der Hamburger zu untersuchen; um die Differenzen gleich zu machen, mufs man die Amsterdamer Zahlen mit 3, die Hamburger mit 4 multiplicieren, wodurch die Differenzen 3 und die Zahlen $321\frac{3}{4}$ und 425 entstehen: also bringt der Hamburger Weg den kleinsten Schaden. — Andre Autoren berechnen derartige Aufgaben durch vier Dreisätze, ermitteln den Schaden auf 100 und vergleichen die Resultate.

Die fünfte Abteilung enthält unter dem Titel: „Von vermischten Wechseln", Einkaufsrechnungen, in denen Einkaufssummen, Spesen und Wechselkurs auf die Höhe des Warenpreises wirken.

Der sechste Abschnitt: „Vom Pary" ist ein Verzeichnis der europäischen Münzen, Mafse und Gewichte, nebst ihrer Vergleichung. Die Münzvergleichung ist auf den Metallwert, den Feingehalt, gegründet.

Teil IV. In der Zinsrechnung findet man gelegentlich der Berechnung der Zinsen mehrerer Kapitale auf einmal den Gebrauch der Zinszahlen, denen wir bis zu Clausberg noch nicht begegnet sind. Aus der Zinseszinsrechnung ist eine Methode von Interesse, welche auf eine Reihenentwickelung führt. Die Entwickelung ist etwas weitläufig. Die Zinsen des Kapitals in einem Jahre heifsen „erste Zinsen", die einjährigen Zinsen der ersten Zinsen heifsen „zweite Zinsen", die einjährigen Zinsen der zweiten Zinsen sind „dritte Zinsen" etc. Die ersten Zinsen sind bei $5\%$ gleich $C \cdot \frac{1}{20}$, die zweiten gleich $C \cdot \frac{1}{20^2}$, die dritten gleich $C \cdot \frac{1}{20^3}$ etc. Für $n$ Jahre findet man $\frac{n}{1}$ erste Zinsen, $\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}$ zweite Zinsen, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$ dritte Zinsen etc.; sobald der Zähler gleich Null wird, bricht die Reihe ab. Verbindet man nun die Formeln für die Gröfse und für die Anzahl der „ersten", „zweiten", „dritten" etc. Zinsen, so ist dann die Summe dieser Glieder gleich dem Endkapital mit Zinszins in $n$ Jahren, man findet:

$$C + C\frac{p}{100} \cdot \frac{n}{1} + C\left(\frac{p}{100}\right)^2 \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} + C\left(\frac{p}{100}\right)^3 \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots$$

In vorstehender Reihe läfst sich jedes folgende Glied aus dem vorhergehenden berechnen, die dazu nötigen Faktoren sind der Reihe nach

$$\frac{pn}{100}, \quad \frac{p(n-1)}{200}, \quad \frac{p(n-2)}{300}, \quad \frac{p(n-3)}{400} \text{ etc.}$$

Für $p = 5$ und $n = 4$ hat man folgende Brüche $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{40}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{80}$. Beispiel: „Wie grofs wachsen 10 000 Thlr. zu 5% in vier Jahren durch Zinseszinsen?"

| | | | |
|---|---|---|---|
| Gegeben Kapital | 10000 | Thlr. | Hieraus $\frac{1}{5}$ |
| kommen | 2000 | „ | Hieraus $\frac{3}{40}$ |
| kommen | 150 | „ | Hieraus $\frac{1}{30}$ |
| kommen | 5 | „ | Hieraus $\frac{1}{80}$ |
| kommen | $\frac{1}{16}$ | „ | |
| | $12155\frac{1}{16}$ | Thlr. | |

Entwickelt man die gewöhnliche Formel für das Endkapital $C\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ nach dem binomischen Satze, so erhält man die obige Clausbergsche Reihe viel schneller.

Die übrigen Partien: Terminrechnung, Rabatt-, Tara-, Stich-, Gesellschafts-, Mischungsrechnung, Regula coeci, R. falsi, Radicieren, Progressionen bieten nichts Besonderes. Erwähnenswert ist nur eine Tabelle mit 32stelligen Logarithmen für die ersten 100 Zahlen, zu deren Ausrechnung er dadurch veranlafst wurde, dafs ihm die Aufgabe gestellt war, die Zahl 2 hundertmal hinter einander zu quadrieren und zu bestimmen, aus wie vielen Ziffern die 100ste Zahl bestehe (2 ist die erste Zahl, 4 die zweite, 16 die dritte etc.). Er findet 190 800 427 345 073 528 122 179 413 681 Ziffern, eine solch erstaunliche Menge, dafs sie alle Menschen seit Erschaffung der Welt noch nicht würden hergestellt haben, wenn sie nichts weiter gethan hätten als Ziffern geschrieben.

Was Clausberg in der Vorrede versprochen: „eine Wissenschaft gründlich und kurz zu rechnen", das hat er auch geleistet. Sein Rechenwerk ist in dieser Periode hinsichtlich der grofsen Vollständigkeit und gelungenen Gruppierung des Stoffs, der sorgfältigen Auswahl und zweckmäfsigen Anordnung der Übungsbeispiele, der genauen Ableitung und strengen Begründung der Regeln, der zahlreichen Rechnungsvorteile und praktischen Auflösungsmethoden unerreicht geblieben.

Clausbergs kaufmännisches Tabellenwerk: „Licht und Recht der Kaufmannschaft. Danzig, 3 Teile 1724 bis 1726," ist ein höchst praktisches Hilfsmittel für alle vorfallenden kaufmännischen Rechnungen. Die Tabellen sind in derselben Absicht hergestellt, wie die, welche wir § 57 als Preistabellen besprachen; auch ihnen können Rechnungsresultate entweder direkt entnommen werden, oder es lassen sich solche, welche mühsame Multipli-

kationen oder Divisionen erfordern, durch einfache Additionen erreichen. Jedem Teile ist eine Anweisung zum Gebrauch beigefügt; dieser ist durchgängig derselbe, nämlich Entnahme von Resultaten, um diese zu addieren. Man findet Tabellen zur Umrechnung von Münzen ohne und mit Agio, zu Wechselreduktionen mit den verschiedensten Kursen, zur Berechnung des Rabatts, zur Vergleichung der Münzen der ganzen Welt (mit Benutzung der Decimalbrüche), zur Lösung von Regeldetriaufgaben auf dem Wege der Addition (Tabelle 73) etc.

Heute haben die Clausbergschen Tabellen keinen praktischen Wert mehr, weshalb wir eine nähere Besprechung unterlassen. Ihren Nutzen kann man erst dann begreifen, wenn man sich in die Zeit versetzt denkt, in welcher die Abwesenheit decimaler Währungszahlen alle praktischen Rechnungen sehr mühsam machte.

Andere Autoren haben das Clausbergsche Tabellenwerk stark benutzt, z. B. Graumann, Licht des Kaufmanns, Berlin 1754. — Kruse, Allgemeiner und besonders Hamburger Kontorist 1753 und später. — Nelkenbrechers Taschenbuch, Leipzig 1769. — Gerhard, Allgemeiner Contorist 1791.

§ 86. **Schularithmetik.** Wir erinnern an die S. 149 gemachte Bemerkung, dafs Clausberg der Repräsentant des kaufmännischen Rechnens ist und dafs die lateinischen und deutschen Schulen mit ihren arithmetischen Leistungen, was die Darstellungsweise und mehr noch was die Stoffmenge betrifft, auf einer weit tieferen Stufe standen.

a) Deutsche Schulen. Christian Pescheck[1]) war der fleifsigste und berühmteste arithmetische Schriftsteller des 18. Jahrhunderts. Keinem zweiten Autor ist die Ehre so vieler Auflagen seiner Schriften so unverdient widerfahren wie Peschecken. Er hat mehr als 30 verschiedene Rechenbücher verfafst; die wichtigsten davon sind: 1) Vorhof zur Rechenkunst (von 1708—1768 zwölf Aufl.). — 2) Fortsetzung der Rechenkunst 1712. — 3) Beschlufs der Rechenkunst 1715. — 4) Der anfahende Rechenschüler 1714 (neun Aufl.). — 5) Allgemeine deutsche Rechenstunden (von 1723—1790). — 6) Italiänische Rechenstunden (von 1724—1762 sechs Aufl.). — 7) Allen drei Hauptständen nöthige Rechenstunden 1725. — 8) Arithmetischer Löseschlüssel. — 9) Arithmetischer Hauptschlüssel 1716. 10) Der getreue Rechenmeister 1727. — 11) ABC der Rechenkunst 1730. — 12) Anführung zur Rechenkunst vor die Niedersächsische Jugend 1734. — 13) Kaufmanns- und Ökonomische Rechnungen. — 14) Italiänische

1) Christian Pescheck, geb. 1676 zu Zittau, besuchte das Gymnasium, wurde 1690 Kopist in Bautzen, war von 1693—1698 Schreiber in Ungarn, bezog 169[illegible] die Wittenberger Universität, wurde 1701 Prediger in Neusaltz und 1704 Lehrer der math. Wissenschaften am Gymnasium zu Zittau, wo er 1747 starb. Jöcher III S. 1414.

Praktika (zehnte Aufl. 1747). — 15) Arithmetische und geometrische Erquickstunden. Den Beweis für den vielseitigen Beifall und die weite Ausbreitung seiner Bücher erbringt Pescheck selbst durch eine Liste[1]) von 44 Schulmännern, meist Rektoren und Kantoren, aus allen Teilen Deutschlands, welche Peschecks Bücher gebrauchten. Hat man einige davon gelesen, so wundert man sich schier ob des ungeheuren Beifalls, denn er war in der That unverdient. Pescheck besafs nur das besondere Geschick, dieselbe Sache ein wenig abgeändert unter neuem Titel immer wieder an den Mann zu bringen; denn viele seiner Bücher sind in der Hauptsache übereinstimmend. Sie enthalten die Species in ganzen unbenannten, darauf in benannten Zahlen, dann die Brüche und die Regeldetri mit ihren einfachsten Anwendungen. Das Aufgabenmaterial ist durchgängig kinderleicht und die Darstellungsweise weitschweifig bis einfältig. Obwohl er sich in den „Italiänischen Rechenstunden 1762" rühmt, 200 verschiedene Rechenbücher zu besitzen, so hatte er den „Geist" der welschen Praktik nicht erfafst; denn er rechnet wiederholt sehr unpraktisch: bei 2 Thlr. 12 gr. 4 Pf. mal 36 multipliciert er erst mit 30, dann mit 6 und addiert, während die Praktik es so [2 Thlr. + $\frac{1}{2}$ Thlr. + $\frac{1}{3}$ gr.] 36 viel kürzer lehrt. Die Multiplikationsmethoden in genanntem Buche sind mehr kurios als nützlich, sie sind ausgeführt in der Form des Triangels, des grofsen Bären (Himmelswagen), des Rhombus, der Pyramide etc. Selbst Ungenauigkeiten liefen ihm unter: „Wenn Zähler und Nenner aus gleichen Ziffern bestehen, so läfst sich der Bruch mit 11 abbrevieren," was doch nur für $2n$ gleiche Ziffern pafst. Über die Zeitrechnung (Berechnung eines Zeitraums) hat Pescheck wacker mit gestritten, auch ein Schriftchen „Demonstration der Monatrechnung" verfafst. Wenn auch durch den Streit, der sich im Anschlufs an den Sprung in der Kalenderzählung vom 18. Februar auf den 1. März 1700 entspann, herausgebracht wurde, dafs man den Monat event. zu 28, 29, 30 oder 31 Tagen und für das Jahr 1700 elf Tage weniger nehmen müsse, so wurde doch die Ungenauigkeit, welche in der Anwendung von Monaten überhaupt liegt, nicht beseitigt. In der Angabe 35 Jahre 5 Monate 12 Tage sind 5 Monate zwölfdeutig; man weifs nur, dafs es 5 aufeinanderfolgende Monate aber nicht welche es sind.

Trotz aller Mängel erfreuten sich die Peschecksehen Bücher einer grofsen Beliebtheit, und des Verfassers Ruf als eines vorzüglichen Methodikers konnte trotz vielfacher Angriffe nicht erschüttert werden. Pescheck hat mit seinen Büchern die bescheidenen Bedürfnisse der Schüler, des gemeinen Volks und der ungeschickten Lehrer zugleich befriedigt. Der grofsen Masse der Schüler brachten sie in den zahlreichen und leichten

1) Im „Vorhof zur Rechenkunst" 1736 neunte Aufl.

Aufgaben eine ihren Kräften entsprechende Übung, der Autodidakt fand in der einfältigen Lehrart ausreichende Erklärung, dem ungeschulten Lehrer wurden sie durch die eingestreuten praktischen Winke, deren Gesamtheit im „Arithmetischen Hauptschlüssel“ niedergelegt ist, zum didaktischen Wegweiser.

Obwohl Pescheck Gymnasiallehrer war, so repräsentiert der Inhalt seiner Bücher doch das Rechnen in den deutschen Schulen.

b) Lateinische Schulen. Als Vertreter für das Rechnen in den lateinischen Schulen wählen wir Joh. Georg Gotthelf Hübsch, Lehrer der Mathematik an der Fürstenschule zu Pforta. Über die einfachsten Anwendungen der Regeldetri ging man im praktischen Rechnen auch hier nicht hinaus, wie der Inhalt des Rechenwerks von Hübsch beweist: „Arithmetica Portensis, Leipzig 1748“ (Ganze Zahlen, Brüche, Praktik, Regeldetri mit Anwendungen); doch war die Behandlung bei weitem geistreicher. Übungsmaterial hat das Buch von Hübsch nur wenig, es ist daher weniger eine Aufgabensammlung, sondern mehr ein Lehrbuch. In der Anordnung des Stoffs trägt es einen logischen und in der Beurteilung der Materie einen kritischen Charakter. Die Definitionen werden auf ihre Richtigkeit, die Lösungsmethoden auf ihre Zweckmäſsigkeit, die Rechnungsvorteile auf ihre Anwendbarkeit, die Proben auf ihre Zuverlässigkeit untersucht. Hier macht er auf Inkorrektheiten aufmerksam, da scheidet er die kuriosen Methoden aus, da läſst er die gekünstelten Vorteile fallen, dort verurteilt er die betrüglichen Proben. Von der wahren, der Sache förderlichen Kritik weiſs er nutzlose Streitereien gar wohl zu unterscheiden und sich solcher zu enthalten. Z. B. „Die Beschreibung, was eine Zahl sey, ist vielen Controversen unterworfen, welche, wo nicht gar keinen, doch wenig Nutzen haben.“ „Das Wort dazuaddiren ist zwar ein Pleonasmus, der aber dem Rechnen selbst nichts schadet.“ „Um die Zahl der Species können sich die Rechenmeister noch nicht vergleichen welche Streitigkeit aber keinen zum Rechenmeister macht.“ — Aus dem Stoffe sind unter Befolgung des Utilitätsprincips alle entbehrlichen Partien (Progressionen, Radicieren, magische Quadrate etc.) ausgeschieden.

Zur Vermeidung von Rechenfehlern betont Hübsch die so wichtige Sorgfalt in der äuſsern Darstellung, was vor ihm noch niemand gethan hat. Seine diesbezüglichen Winke haben bleibenden Wert. Er sagt (S. 41): „Um Irrtümern vorzubeugen, schreibe die Charaktere a) reinlich, b) deutlich und c) ordentlich. Die Kalligraphie ist in Rechnungssachen weit mehr als die von Buchstaben zu excoliren. Ad a) Die Reinlichkeit leidet weder Rasuren noch Korrekturen; ad b) die Deutlichkeit erfordert sattsame Gröſse und unzweifelhaften Ductus (damit man 6 von 0 und 7 von 1 unterscheide); ad c) zur Ordnung gehört gebührender Raum (oben und

uten, zwischen den Ziffern und zwischen den Zeilen), auch gleiche Disposition (d. h. Zeilen parallel, Colonnen senkrecht), auch gehörige Absonderung durch Linien und Zwischenräume.“ — Das sind drei äufserst wichtige Forderungen, welche bei ihrer Vernachlässigung zu ebenso vielen Fehlerquellen werden, bei ihrer Befolgung jedoch nicht allein die Richtigkeit der Rechnung fördern, sondern auch in dem Schüler den Sinn für Sauberkeit, Ordnung und Schönheit wecken und pflegen.

Die Lehrthätigkeit des scharfen Kritikers und geschickten Methodikers Hübsch war auch erfolgreich; er selbst berichtet (I, 356): „Die Practica erleidet gar mancherley Variationen, wie denn ein ehemaliger Alumnus zum Exercitio ein von mir ohne diese Absicht vorgegebenes Exempel mehr als 200mal anders ausgerechnet, wovon ich das Manuscript noch zum Andenken aufbehalte.“ Bei dieser Notiz begreift man das damals übliche Sprichwort: „Practica est multiplex.“

**§ 87. Algebraische Beweisart.** Algebraische Beweise trifft man in den Rechenbüchern nur selten, weil in der Unterrichtsordnung die praktische Arithmetik der allgemeinen vorhergeht. Clausberg und Hübsch haben sich deshalb in ihren Darstellungen auch der algebraischen Mittel enthalten. Denselben Stoff wie Clausberg behandelte auch Kästner: „Fortsetzung der Rechenkunst in Anwendung auf mancherley Geschäfte, Göttingen 1786“, stattete ihn jedoch durchgängig mit algebraischen Beweisen aus. Auf Deutlichkeit und Entwickelung der Begriffe, auf Schärfe der Beweise und auf Anwendung der Vorteile der „mathematischen Rechenkunst“, welche drei Stücke nach Kästners Urteile den gewöhnlichen Anweisungen abgingen, hatte er es abgesehen. „Denn die Vortheile, welche Algebra und Analysis gewähren, sind von solcher Wichtigkeit, dafs keiner ohne Schande ihrer unkundig sein kann, dafs es grofse Trägheit ist, sie nicht lernen wollen, und grofse Schwachheit, sie nicht lernen können. Wer ohne Buchstabenrechnung rechnen lehren will, ist dem zu vergleichen, der Musik ohne Noten lehren will. Früher hat man ohne die neueren Hilfsmittel viel geleistet, aber mit Schwierigkeiten; und eben dieser Schwierigkeit wegen sind Erleichterungen gesucht worden. Ehe man die Logarithmen kannte, führte man auch grofse Rechnungen aus, rechnet aber eben jetzt mit Logarithmen. Wer die neueren Kunstgriffe nicht brauchen will, dem ist zu sagen, dafs die Römer zwar ohne Steigbügel aufs Pferd kamen, dafs aber der kein Reiter werden wird, der zu träg oder ohnmächtig ist, in den Steigbügel zu treten.“ Algebra, Decimalbrüche und Logarithmen gewähren die von Kästner angedeuteten Erleichterungen. — Alle Entwickelungen sind in Buchstabenzahlen geführt und dadurch allgemeine, strenge Beweise gewonnen worden. Wo es angeht, ist die Rechnung aufser mit den Zahlen selbst auch noch mit deren Logarithmen ausgeführt. Zur Charakterisierung der

Kästnerschen Art wollen wir die Lehre von den Decimalbrüchen und die Ableitung der Kennzeichen über die Teilbarkeit der Zahlen skizzieren. — I. Der Decimalbruchrechnung ist die Lehre von den Potenzen vorausgeschickt, auf welche die Beweisführung für Multiplikation und Division sich stützt. Z. B. $a \cdot 10^{-5} \cdot b \cdot 10^{-3} = ab\,10^{-8}$, oder in Zahlen: $3 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 6 \cdot 10^{-8} = 0{,}00003 \cdot 0{,}002 = 0{,}00000006$. — Division: $a \cdot 10^{-m} : b \cdot 10^{-n} = \frac{a}{b} \cdot 10^{-m+n}$. — II. Teilbarkeit der Zahlen. Für 2: Jede Zahl $N$ kann auf die Form $10b + a$ gebracht werden; $\frac{N}{2} = 5b + \frac{a}{2}$ wird eine ganze Zahl sein, wenn $a$ d. i. die Einerzahl gerade ist. — Für 5: Giebt man der Zahl $N$ die Form $10b + a$, so ist $\frac{N}{5} = 2b + \frac{a}{5}$; und die Bedingung lautet: die Einer müssen durch 5 teilbar sein. — Für 4 stellt man $N$ in der Form dar $100c + 10b + a$, für 8 in der Form $1000d + 100c + 10b + a$, dividiert man nun beziehungsweise durch 4 und 8, so ergeben sich die bekannten Bedingungen bezüglich der letzten zwei oder drei Stellen. — Für 3:

$$\text{Wenn} \quad N = a + 10b + 100c + 1000d + \cdots$$

$$\text{dann ist} \quad \frac{N}{3} = \begin{cases} \frac{a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3} + \frac{d}{3} + \cdots \\ \quad + 3b + 33c + 333d + \cdots \end{cases}$$

Da nun der untere Teil vorstehender Doppelreihe eine ganze Zahl ist, so wird $\frac{N}{3}$ eine solche sein, wenn $\frac{1}{3}(a + b + c + d + \cdots)$ d. i. der dritte Teil der Quersumme von $N$ eine ganze Zahl ist. Ähnlich für 9.

Gegenwärtig bedienen sich die Vertreter der praktischen Arithmetik nicht der algebraischen Beweisführung, sondern nur der arithmetischen Begründung. Jene mufs auch so lange zurücktreten, bis die Schüler im Gebrauche allgemeiner Zahlen hinreichend geübt sind; von diesem Zeitpunkte an ist sie aber auch von unschätzbarem Werte.

§ 88. **Methodische Grundsätze.** Wir haben § 78 als Verdienst der Philanthropen hervorgehoben, dafs sie ihre Zeitgenossen für das Streben nach Verbesserung der Methode zu begeistern wufsten. Diese Bestrebungen zeitigten als Früchte einige methodische Grundsätze, welche noch heute Anerkennung besitzen. Es sind folgende.

1. Der Stoff ist mit Rücksicht auf den Schüler zu wählen, wobei Alter, Geschlecht und künftiger Beruf in Betracht kommen. — Die Befolgung dieser Forderung wurde auf den Büchertiteln berührt: Bertram, Rechenbüchlein vor Weibsbilder 1725. — Rechenmeisterin oder Anweisung für ein junges Frauenzimmer (anonym), Budissin 1791. — Grüning, Rechenbuch für Kinder, Altona 1783. — Metternich, Gründliche Anweisung für

Anfänger, 1783. — Wilborn, Der wohlunterwiesene europäische Negociant, Leipzig 1773. — Kruse, Allgemeiner Kontorist, Hamburg 1753 u. 1761. — Berger, Accurater Rechnungsbeamter, Dresden 1720. — Niese, Rechenbuch für Sehende und Blinde, Mannheim 1773. — Basedow erklärte[1]) sogar hinreichende Befähigung zur Anwendung der vier Species für genügend: „Wenn sich jemand in Anwendung der vier Species Fertigkeit erworben hat, so besitzt er eine allgemeine Fertigkeit des Rechnens und bedarf nichts weiter. Es ist unnütz, den Schüler dann noch mit Exempeln von allerlei Ware, Tara, Zinseszins, Rabatt, Umwechseln der Geldsorten, Gewinn- und Verlustrechnung etc. noch viele Jahre aufzuhalten.“

2. Schreite stufenmäfsig fort! — Bezüglich der ersten Rechenübungen kam man in Befolgung dieses Grundsatzes zur periodenweisen Einführung in das unendliche Zahlengebiet. Bisher hatte die Praxis geherrscht, die Schüler auf einmal in das unendliche Zahlengebiet einzuführen, indem man das Rechnen mit dem Numerieren zehn- bis zwölfstelliger Zahlen begann. In der Behandlung der Species war es ähnlich, auch hier wurde ein Fortschreiten von kleinen zu gröfseren Zahlen nur selten befolgt. Beispielsweise wählte Benj. Hederich („Anleitung zu den fürnehmsten math. Wissenschaften, 1728“) für die erste Division keinen kleineren als einen sechsstelligen Divisor. Im Philanthropin zu Dessau drang dagegen, vertreten durch Busse[2]), die Ansicht durch: die ersten Zahlenoperationen seien nur im Gebiete von 1 bis 10 vorzunehmen, dann sei ebenso das Gebiet 1 bis 100 und als dritte Stufe das Gebiet 1 bis 1000 zu behandeln. Übrigens seien die dreistelligen Zahlen zu bevorzugen, mit mehrstelligen solle man nur wenig und im Anfange garnicht rechnen lassen. „Erst müssen die Kinder 100 begriffen haben, ehe man sie von Tausenden und Millionen schwatzen läfst.“ (Busse.)

3. Knüpfe an die Anschauung an! — Diesen Grundsatz verdankt die Methodik ebenso wie den vorigen den Philanthropen. Punkte, zu Zahlbildern[3]) formiert, bilden das erste durch Busse geschaffene Anschauungs-

---

1) Basedow, Überzeugende Methode . . . 1763.

2) Friedr. Gottlieb von Busse, geb. 1756 zu Gardelegen in der Altmark, studierte Theologie, widmete sich dem Erziehungswesen und wurde 1779 Prof. am Philanthropin in Dessau, übernahm 1785 daselbst die Prinzenerziehung, trat 1793 ganz in den Hofdienst (Feuerlöschwesen und Witwenkasse) und wurde 1801 Prof. der Math. und Physik an der Bergakademie zu Freiberg, 1811 durch den König von Sachsen geadelt; er starb 1835 zu Freiberg. Vgl. Allgem. deutsche Biogr. III, 649. Bezüglich seiner Verdienste als Mathematiker siehe Günther, Beiträge zur Gesch. der neuern Mathematik.

3) Busse, Rechenbuch . . . 1808, S. 6 ff., auch 1786.

mittel für den Rechenunterricht. Genannte Zahlbilder haben folgende Gestalt:

Auf diese Weise geht es fort bis zur Zahl 30. Hundert Punkte sind zu je 10 in einer Reihe auf schmale Brettchen gebracht, deren Zusammenschiebung eine quadratische Anordnung der Punkte ergiebt. Zur Zah 1000 ist das Zehnbild hundertmal in quadratischer Ordnung verwendet Die Zahlbilder wurden in der Absicht gebraucht, dem Schüler die Meng der Einheiten einer Zahl zum Bewufstsein zu bringen. Beim Gebrauch verdeckte man einige Punkte mit der Hand und liefs dem Kinde aus de sichtbaren die verdeckten ermitteln.

§ 89. **Methodische Handbücher.** Es ist fast selbstverständlich, da in jener Zeit, in welcher man für Methode schwärmte, auch methodisch Handbücher, Anleitungen zur Erteilung eines erfolgreichen Rechenunte richts, entstanden. Basedow erklärte bereits ihre Notwendigkeit; für ein wohleingerichtete Rechenschule seien drei Bücher: „eine demonstrativ Anweisung, ein Aufgabenbuch zur Übung und ein System der Handlungs wissenschaften, darin alle Commerzsachen erklärt sind“, erforderlich. – Das erste methodische Handbuch ist Peschecks „Arithmetischer Haupt schlüssel 1741“, „welcher den Präceptoribus, die seine Rechenstunde beim Unterrichte gebrauchten, zur Assistenz dienen sollte“. Es enthä die ganze Rechenkunst mit ausführlicher Erklärung und überall für de ungeschulten resp. unerfahrenen Lehrer notwendige und wertvolle didak tische Winke. Bezüglich des Numerierens empfiehlt Pescheck: Lesen de Zahlen in, dann aufser der Reihe; Niederschreiben der Zahlen in, dan dictando aufser der Reihe; zur Verhütung von Irrtümern gebe man gewiss Anhaltspunkte z. B. zu Hunderten gehören stets drei, zu Einertausende vier Ziffern etc. Basedows „Überzeugende Methode der auf das bürge liche Leben angewandten Arithmetik zum Vergnügen der Nachdenkende und zur Beförderung des guten Unterrichts in Schulen 1763“ soll zw auch ein methodisches Handbuch sein; doch enthält es nur einleitung weise einige methodische Grundsätze (triff eine passende Auswahl d Stoffes, unterrichte deutlich, schreite langsam und stufenmäfsig fort, wiede hole oft) und dann eine Aufgabensammlung.

Busses „Anleitung zum Gebrauche meines Rechenbuchs“ (1786, 179 1800, 1804) ist die beste Leistung unter den methodischen Handbüche jener Zeit. Der Verfasser war wohl der geschickteste Rechenmethodik des 18. Jahrhunderts. Er verlangt in allen Stücken Klarheit, Deutlichk und Verständlichkeit, daneben auch Akkomodation an die Denk- u Sprechweise des Schülers (weshalb die Proportionen als den Schlüs

und Redewendungen des gemeinen Lebens zu fremdartig nicht zu gebrauchen seien); er eifert gegen den unzeitigen Gebrauch der Definitionen („Erklärungen stehen meist vorher, wo sie dem Anfänger nichts nützen; jedoch das andere Extrem wäre auch falsch, sie allemal ans Ende zu setzen"), betont die von einigen vernachlässigte Fertigkeit im Rechnen („Schüler, die wegen mangelnder Capacität den Grund der Rechnung nicht einsehen können, müssen wenigstens rechnen lernen"), erklärt den zu häufigen Gebrauch von sinnenreizenden Gegenständen (Nüsse, Äpfel, Birnen) als Anschauungsmittel für unzweckmäfsig und hält Künsteleien und das Streben nach einer Universalregel (wie die Reesische sein sollte) für unerlaubt („Kunstgriffe und Methoden, welche nur für geniale Lehrer und Köpfe passen, sind zu vermeiden. — Man mufs nicht die Aufgaben für die Kunstgriffe einrichten, besonders nicht für selbsterdachte Lieblingskunstgriffe; sondern umgekehrt verfahren. — Mehrentheils erreichen diejenigen Wandrer am spätesten das Ziel ihrer Reise, welche allenthalben nach Fufssteigen fragen; und besonders ist es einem jeden, der während des Weges auf die ganze Absicht seiner Reise zu denken hat, gar sehr anzurathen, dafs er auf der Landstrafse bleibe, oder doch nur solche Richtwege einschlage, die sich ihm ganz ungesucht darbieten"). — Betreffs der Ausführung der von Busse aufgestellten Gesichtspunkte beschränken wir uns auf Anführung einiger Einzelheiten. Das Anschauungsmittel müsse möglichst qualitätslos sein, also nicht Nüsse, Äpfel etc., sondern Punkte, Striche. Das ganze Zahlengebiet sei abteilungsweise zu behandeln (1—10, 1—100, 1—1000, 1—∞). Behendigkeit im Addieren und Subtrahieren werde durch wiederholtes Aufsagen arithmetischer Reihen mit allen Einerdifferenzen (steigend und fallend) erlangt. Springendes Addieren, um bequeme Summen zu erhalten, sei zu vermeiden, weil dadurch die Absicht, Fertigkeit im Zuzählen jedes Einers zu erreichen, vereitelt und eine beständige Furcht vor gewissen Zahlen genährt werde. Nach den vier Species erörtert Busse die Behandlung der verschiedenen Ansatzformen: Dreisatz mit welscher Praktik, Kettensatz, Basedows Regel (siehe § 91).

Zu den methodischen Handbüchern gehören auch noch: Splittegarb, Handbuch für Lehrer bei der Anleitung zum Rechnen 1784; und Biermann, Leitfaden zu einem Unterrichte im Rechnen für Lehrer 1792.

Trotz dieser auf Verbesserung der Methode gerichteten Hilfsbücher war es am Ausgange des 18. Jahrhunderts mit dem Rechenunterrichte in der Volksschule immer noch übel bestellt, sodafs das preufsische Oberschulkollegium Gelegenheit nahm, durch die „Anweisung[1]) für die Schullehrer in Land- und Stadtschulen 1794" dem didaktischen Ungeschick der

1) Wörtlich abgedruckt in Heppe III, 69.

Lehrer an niedern Schulen zu Hilfe zu kommen. Der den Rechenunterricht betreffende Abschnitt enthält die Grundzüge der Methode und läfst aus den positiven Vorschlägen Weg und Ziel des Rechnens deutlich erkennen. Es wird darin betont: Die Erörterung über den Stellenwert, das Rechnen mit kleinen Zahlen durch alle Species im Kopfe, die parallele Betreibung des Kopf- und Tafelrechnens, das gemeinschaftliche Korrigieren eines an der Wandtafel gerechneten Exempels, die Wahl solcher Aufgaben, wie sie im Hauswesen des Landmanns und Bürgers vorkommen, die Führung eines Haushaltungsbuches mit Einnahme- und Ausgaberegister.

§ 90. **Kopfrechnen.** Soeben haben wir eine Anordnung über das Kopfrechnen berührt, als gesonderte Übung trat dasselbe erst gegen das Ende des 18. Jahrhunderts auf. Schon Hübsch hatte (Arithm. portensis 1748) für das Kopfrechnen eine Lanze gebrochen. Seines Wissens, sagt er, sei in keiner Practic ex professo davon gehandelt, ungeachtet es bei den meisten concurrire; es sei das allergeschwindeste und bequemste Rechnen, da es ohne allen Apparat, allerwegen und zu allen Zeiten, sogar im Finstern geschehen könne. Erforderlich sei nur, dafs man das Unentbehrlichste auswendig lerne, nämlich das Einmaleins und die Reduktionszahlen. — Aus der Bemerkung aber, „wenn man viel mit der Feder gerechnet hat und fest darin ist, so entsteht nach und nach das Kopfrechnen von selbst“, ersieht man, dafs Hübsch der Rechnung im Kopfe noch nicht die richtige (erste) Stelle einräumte.

Im Philanthropin zu Dessau betrieb Busse das Kopfrechnen als eine dem schriftlichen parallele Übung und er traf auch schon in den meisten Fällen das Richtige. So wurde beispielsweise in der Addition zweier dreistelliger Zahlen mit den Hunderten begonnen, dann wurden die Zehner und zuletzt die Einer hinzugefügt; in ebenderselben Ordnung subtrahierte man auch. Daneben lehrte er den Unterschied zweier Zahlen durch Aufwärtszählen finden: $332 - 257 = 43 + 32 = 75$ und zog auch die Vorteile, welche durch Anwendung gewisser Zahlen in algebraischer Form $(59 = 60 - 1)$ gewonnen werden, heran. Viele Regeln, meint er, könnten nicht gegeben werden, vielmehr bilde sich jeder seine Hilfsmittel von selbst; denn Freiheit und Raschheit in der Gruppierung und Verwandlung der Zahlen sind die Eigenschaften, durch welche sich der Kopfrechner vor dem, der mit der Feder nach festen Normen rechnet, vorteilhaft unterscheidet.

Die speziellen Schriften fürs Kopfrechnen nahmen mit der „Anleitung zum Kopfrechnen mit dem schriftlichen zu gebrauchen, Biermann“ (1791, 1795, 1812) ihren Anfang; die zweite ist: Köhler, Anweisung zum Kopfrechnen 1797. Über den Wert des Kopfrechnens urteilte Köhler, es habe eine langjährige Erfahrung hinlänglich von der Wahrheit überzeugt,

dafs unter seinen Rechenschülern immer diejenigen, welche er neben dem Tafelrechnen auch im Kopfrechnen unterrichtet habe, die fertigsten und geschicktesten Tafelrechner geworden seien. Einen indirekten Nutzen des Kopfrechnens weifs bereits Biermann, Schreib- und Rechenmeister in Hannover, hervorzuheben: „Ihr bekommt dadurch ein herrliches Gedächtnifs, könnt vieles schneller fassen und lange im Kopfe behalten, was andre, die nicht im Kopfe rechnen können, wohl bleiben lassen müssen.“ Schliefslich wird er poetisch und läfst Louisens Freude über die Kunst, im Kopfe rechnen zu können, im Liede ausklingen:

Ihr[1]) könnt nur immer meine Tafel nehmen,
Ich werde mich um sie gewifs nicht grämen!
Was geht dem noch die schwere Tafel an,
Der leicht und schnell im Kopfe rechnen kann?

Wie würd's mir armen Mädchen auch ergehen,
Wie mir die Tafel bei den Schlüsseln stehen?
In Küch und Keller lief und stiefs ich an,
Wohl mir, dafs ich im Kopfe rechnen kann!

Und ohne Tafel liefs ich mich betrügen,
Mir manchen Groschen aus der Tasche lügen.
Jetzt rechn' ich nach, und keiner sieht mirs an,
Wohl mir, dafs ich im Kopfe rechnen kann!

Auch wirds dadurch im Kopfe immer heller,
Ich merk auf alles und begreife schneller
Und lerne gern, sonst ging ich schwer daran,
Wohl mir, dafs ich im Kopfe rechnen kann.

**§ 91. Die Reesische und die Basedowsche Regel.** Der Kettensatz und die Regel von Rees, diese beiden identischen Ansatzformen, galten im 18. Jahrhundert als verschiedene Ansätze. Einige Autoren (Lamboy[2]), Busse) führen beide neben einander an, den Kettensatz erklärend und empfehlend, die Reesische Regel nur nennend und verwerfend. Die irrtümliche Ansicht über die vermeintliche Verschiedenheit beider Ansätze hat vermutlich ihren Grund darin, dafs man beim Zurückgehen auf den Ursprung nicht auf dieselbe Quelle komm[illegible] in Deutschland schon im 15. und 16. [illegible]hundert [illegible] Reesische Regel kam 1739 au[illegible] zu u[illegible]rucht des

1) Bierman[illegible]
2) Lamb[illegible]

Strebens nach einer Universalregel, für welche man noch dazu den Ansatz fehlerfrei und ohne jedwedes Nachdenken aufstellen könne. Ein solches Streben fand zu allen Zeiten statt und jedes Jahrhundert hat eine Regel als allgemeine bevorzugt: das 16. den Dreisatz, das 17. die welsche Praktik, das 18. den Kettensatz, das 19. den Bruchsatz.

„Bis zur ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts war der Kettensatz in Deutschland den meisten Kaufleuten gänzlich unbekannt, in den Rechenbüchern gab es keine gründliche Beschreibung davon“, schrieb Clausberg und bediente sich in der Wechselrechnung ausschliefslich dieser bequemen Auflösungsmethode, deren Ausbreitung dadurch wegen der Beliebtheit des Clausbergschen Rechenwerks mächtig gefördert wurde.

Da im 18. Jahrhundert keine Regel ohne Beweis erscheinen durfte, so mufste auch der Kettensatz bewiesen werden, obgleich er zur Beweisführung garnicht angelegt ist. Bei besseren Autoren (Clausberg, Kruse, Lamboy, Busse) findet man auch eine korrekte, wenn auch sehr weitläufige Ableitung. Die Konstruktion des Ansatzes geschieht durch Vereinigung mehrerer Dreisätze.

Auch in Spezialschriften wurde der Kettensatz gelehrt: Koch, Der sich selbst lehrende Kettensatz, Dresden 1790. — Illing, Kurzer jedoch gründlicher Unterricht in der Kettenrechnung, Dresden 1791. — Hunger, Die Kettenregel theoretisch und praktisch erläutert 1793.

Die Reesische Regel trägt den Namen von Caspar Franz de Rees, einem holländischen Lehrer (geboren 1690), der durch seine Bearbeitung die allgemeine Anwendbarkeit dieses Ansatzes zeigte und dadurch die Ausbreitung desselben veranlafste. „Allgemeine Regel der Rechenkunst von K. F. de Rees“ kam zuerst holländisch heraus und wurde 1737 ins Französische übersetzt. Die französische Ausgabe übertrug Professor Kahle zu Göttingen 1739 ins Deutsche. Für den Aufbau der Kolumnen ist nicht die kettenweise Verknüpfung der Glieder leitendes Princip, vielmehr herrscht noch Willkür in der Reihenfolge. Nur Beobachtung folgender Punkte ist geboten: Beginne mit dem Fragegliede, verwende alle Verhältnisse, bringe nie zwei gleiche Benennungen auf eine Seite, setze auf eine Seite dieselben Benennungen wie auf die andere. Die vier Stadien der Ausrechnung: Wegschaffen der Brüche, Kürzen, Multiplicieren der Kolumnen, Dividieren der Produkte sind eingehend dargelegt. Um die allgemeine Anwendbarkeit der Regel zu erweisen, sind allerlei Exempel der einfachen und zusammengesetzten Regeldetri, der Gesellschaftsrechnung, sogar solche aus der Multiplikation und Division der Brüche mit ihrer Hilfe aufgelöst. Der umfangreichste Abschnitt ist jedoch derjenigen Gattung von Aufgaben gewidmet, auf welche die Methodik gegenwärtig die Anwendung der Reesischen Regel (resp. des Kettensatzes) beschränkt. — Nicht allein die

zahlreichen Auflagen der deutschen Übersetzung (1743, 1751, 1753, 1766, 1787, 1789 sämtlich von Lorenz Willig besorgt), sondern auch selbständige Anweisungen zur Reesischen Regel bezeugen deren günstige Aufnahme.

Die Basedowsche Regel[1]) ist zwar nach dem Muster des Kettensatzes konstruiert, doch kann der Ansatz nicht ohne einiges Nachdenken gebildet werden. Aufgabe: „1200 Mann verzehren einen Vorrat von 2400 Centner Mehl in 4 Monaten, wieviel Mann werden mit 4000 Ctr 3 Mt auskommen?“ Ansatz: Nachdem die Aufgabe in zwei Zeilen geschrieben ist, wie folgt

| | | |
|---|---|---|
| 1200 Mann | 2400 Ctr | 4 Mt |
| ? „ | 4000 „ | 3 „ |

stellt man die ersten zwei Glieder einander gegenüber, die Frage in die „linke Säule“, welche aus lauter Divisoren, während die rechte aus lauter Multiplikatoren besteht. Nun entscheidet man, ob die Glieder in der unteren Zeile zu Multiplikatoren oder Divisoren werden. Multiplikatoren werden sie dann, wenn bei doppelt vorhandener Anzahl noch einmal so viel herauskäme; Divisoren dann, wenn sich bei doppelter Anzahl das Resultat in die Hälfte verwandelte. Die Glieder der oberen Zeile ordnen sich dann von selbst. Das Basedowsche Schema erhält die Gestalt a. Busse ging auf die Einheit zurück, wandte den Bruchstrich an und gewann Schema b.

a)

| | |
|---|---|
| ? | 1200 M |
| 2400 | 4000 |
| 3 | 4 |

b) $\dfrac{1200\text{ M} \,.\, 4000 \,.\, 4}{2400 \,.\, 3}$

Wir erkennen in der Basedowschen von Busse verbesserten Regel bereits den Übergang zu dem in unserm Jahrhundert beliebten Bruchsatze.

§ 92. **Politische Rechenkunst.** Unter politischer Rechenkunst[2]) fassen wir diejenigen Aufgaben zusammen, welche durch die Rentenanstalten, Versicherungsinstitute und Aussteuerkassen an die praktische Arithmetik gestellt wurden. Man befragte die Arithmetik um die Dauer des menschlichen Lebens, verlangte Regeln zur Beurteilung über die Zunahme an Staatsbürgern, begehrte Auskunft über Hoffnungen und Wahrscheinlichkeiten. Statistik und Mortalitätstabellen wurden dadurch geschaffen. In dem zugehörigen Rechnungswesen spielen Wahrscheinlichkeits- und Rentenrechnung eine hervorragende Rolle. Da die politische Rechenkunst in die

---

1) Busse, Anleitung . . 1808.

2) Marperger ist der erste Schriftsteller über diese Materie. Vgl. Allgem. deutsche Biogr. XX, 405.

Bureaux des Verwaltungswesens und nicht in die Schule gehört, so dürfen wir hier den Gegenstand nur obenhin streifen.

Die ersten Versicherungsinstitute waren die Tontinen.[1]) Die Mitglieder der Tontine (Tontinisten) schliefsen unter sich und mit dem Entrepreneur (Tontinarius) den Vertrag derart, dafs jedes Mitglied ein gewisses Kapital einlegt und dafür jährlich bis zum Tode des letzten Mitglieds eine gleichgrofse Rente erhält und dafs die Rente der Verstorbenen an die Überlebenden verteilt wird. Ihren Namen hat die Tontine von Lorenz Tonti, einem Neapolitaner, der in französischen Diensten stand; die erste nahm 1696 unter Ludwig XIV. ihren Anfang. Jede Aktie kostete 300 *tt*, 1726 starb das letzte Mitglied und genofs eine Rente von 73 500 *tt*. Bei der Berechnung kommt neben dem Zinsfufse das meiste auf die Mortalität an; ist diese zu grofs angenommen, so leidet der Entrepreneur Schaden, im andern Falle erleiden ihn die Interessenten.

Errichten Gläubiger und Schuldner den Vertrag so, dafs dieser jenem die von ihm empfangene Summe $s$ in $n$ Jahren jährlich zu gleichen Teilen $r$ abzahle, so ist dies eine Zeitrente. Die Leibrente unterscheidet sich von jener nur dadurch, dafs der Rentner die Rente bis an den Tod geniefst. Bei Leibrenten müssen ebenfalls Mortalitätstabellen zu Grunde gelegt werden. Durch Gewährung besonderer Freiheiten[2]) an die Rentner mufste man anfangs das Publikum zum Ankaufe von Renten animieren. — Die Berechnung mufs folgende Punkte in Betracht ziehen: a) Die mittlere Lebensdauer, welche aus dem jeweiligen Alter und der allgemeinen Sterblichkeitsordnung gefunden wird, b) Beginn und Höhe der Rente, c) Einlage, d) den Zinsfufs, welcher nicht zu hoch angenommen werden darf.

Die erste Sterblichkeitstabelle wurde 1691 von Caspar Neumann in Breslau hergestellt und von Halley 1691 zur Berechnung von Leibrenten benutzt. 1738 war Kerseboom für holländische Verhältnisse, 1746 Deparcieux für französische und 1747 Hogdson für Londoner hierin thätig. 1756 erschien Süfsmilchs „Göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts“ (vierte Auflage 1775 besorgt von Baumann). Die Süfsmilch-Baumannschen Mortalitätstabellen wurden bis in die neueste Zeit in den einschlagenden Rechnungen gebraucht. Süfsmilch hatte seine Erfahrungen aus dem allmählichen Absterben von 1000 neugeborenen Kindern genommen, das höchste Alter war 97 Jahre. Jetzt bedient man sich in Preufsen der „Verbesserten Sterblichkeitstafel, Absterbeordnung und Lebenserwartung der preufsischen Bevölkerung“, zu finden in: „Preufsische Statistik Bd. XLVIII A, Anlagen 66 und 67.“

1) Vgl. Marperger, Montes pietatis S. 258. — Desgl. de Florencourt, Abhandlungen . . S. 243.

2) Die Renten waren keiner Verkümmerung unterworfen.

In den Witwenkassen[1]) kommt es auf genaue Bestimmung des Einsatzes zur Einkaufung der Witwenpension an, wobei das Alter des Ehepaares, das allmähliche Entstehen der Pensionswitwen und ihr Absterben und das Abnehmen der beitragenden Mitglieder in Rücksicht zu ziehen sind. Anfangs benutzte man auch hier die Süfsmilchsche Sterblichkeitstafel. Kritter wies nach, dafs für die Witwenkassen[2]) Tabellen hergestellt werden müfsten, welche auf das Absterben von Ehepaaren gegründet seien; er berechnete selbst solche Tabellen.[3])

Die Aussteuerkassen[4]) erforderten Tabellen über die Verheiratung von Mädchen. — Die Assekuranzen (gegen Schiffbruch, Hagel, Viehseuche, Brand etc.) müssen ihr Verhältnis zwischen Beitrag und Entschädigung auf Wahrscheinlichkeit über den Eintritt von Unglücksfällen gründen.

**§ 93. Rückblick auf die zweite Periode.** Die auf Förderung des niederen Schulwesens gerichteten Bemühungen der Staatsregierungen äufserten sich in dem Erlassen von Schulordnungen, und am Ende des 18. Jahrhunderts war fast kein deutscher Landesteil mehr ohne eine solche. Die Führerschaft unter den Schulpädagogen hatten nach einander die Pietisten und Philanthropen; jene begründeten die Waisenpflege, Armen- und Realschule und regten auch die Errichtung der Lehrerseminare an, diese richteten ihr Augenmerk auf Verbesserung der Methode.

Den Nutzen mathematischer Kenntnisse suchte man für jeden Stand zu erweisen und empfahl demgemäfs allen Kreisen das Studium der Mathematik. Um die Ausbreitung der mathematischen Wissenschaften auf Hochschulen erwarben sich Wolf und Kästner hervorragende Verdienste. Clausbergs „demonstrative Rechenkunst" ist die beste kaufmännische Arithmetik. Unter den Schulbüchern erfreuten sich, wenigstens in der ersten Hälfte des Jahrhunderts, Peschecks Schriften grofser Beliebtheit.

Die Schulung des Geistes, der formale Bildungsgewinn, wurde neben der Vermittelung positiver Kenntnisse als neuer Zweck des mathematischen Unterrichts gekennzeichnet und angestrebt. Infolge dessen ersetzte man die mechanische Methode durch die beweisführende. Die Gesamtheit der methodischen Errungenschaften (Stoffwahl mit Rücksicht auf die Schülerkreise, Eröffnung des Verständnisses, Stufenmäfsigkeit im Fortschreiten, Anschaulichkeit) findet man niedergelegt in den methodischen Handbüchern,

---

1) Gegründet die zu: Cassel 1750, Bremen 1754, Weimar 1757, Schwerin 1769, Berlin 1775.

2) Kritter ist der beste Schriftsteller darüber, er schrieb 1768 „Oekonomisch politische Auflösung der wichtigsten Fragen bei Errichtung dauerhafter Wittwenkassen".

3) Götting. Magazin d. Wiss. III. Bd., 2 St., S. 289.

4) Krünitz, Ökonomische Encyklopädie.

welche als neue litterarische Erscheinung neben den arithmetischen Lehr- und Übungsbüchern in dieser Periode auftraten.

Gewinnbringend für das schriftliche Rechnen wurden: Das Unterwärtsdividieren, die von Busse verbesserte Basedowsche Regel, die allmähliche Benutzung der Decimalbrüche und Logarithmen, die Beseitigung der gekünstelten welschen Praktik, die Verwerfung der unzuverlässigen Neunerprobe.

Unter den allgemeinen Lösungsmethoden erhielt der Kettensatz (auch Reesische Regel genannt) den Vorzug. — Gegen Ende des Jahrhunderts betonte man das Kopfrechnen als eine von dem schriftlichen Rechnen gesonderte Übung.

---

## Die dritte Periode: von 1800 bis heute.

# Verfechtung von Principien.

§ 94. **Schulwesen.** Das 19. Jahrhundert hat das Schulwesen in raschem Entwickelungslaufe auf eine ungeahnte Höhe der Vollkommenheit gebracht, sodafs sogar unter den politischen Parteien der Kampf um die Schule zu entbrennen droht, ein Kampf, welcher nur als der Ausdruck der hohen Bedeutung angesehen werden kann, welche man der Schule beimifst. Möchten jedoch alle beteiligten Faktoren zusammenwirken, dafs die Schule unberührt bleibe vom Getriebe der Parteien und dafs sie unentwegt festhalte an dem überkommenen Erziehungsideal, der harmonischen Ausbildung aller Seelenkräfte, und dafs sie von ihrer sichern Grundlage, dem Christentum, nicht weggerückt werde, was nur zu ihrem Ruine ausschlagen müfste.

Von dem alten Bestande der Schulgattungen haben das Gymnasium und Seminar eine Differenzierung nicht erlitten, wohl aber entwickelte sich die Realschule nach vorhergegangener Zweiteilung in Realschule I. Ordn. und II. Ordn. zum Realgymnasium und zur Realschule, und die Volksschule stufte sich ab in eine höhere, mittlere und niedere. Als neue Schulgattungen[1]) kamen die Handels-[2]), Gewerbe-[3]), Landwirtschaftsschule und allerlei Fachschulen[4]) (Web-, Uhrmacher-, Blech-, Klöppelschule etc.) hinzu.

---

1) Fischer, „Über die zweckmäfsigste Errichtung von Lehranstalten f. d. gebildeten Stände" 1806.

2) Die älteste Handelsschule ist die Hamburger, gegründet 1767; die zweite ist die Lübecker; die nächste die Leipziger, 1831 von A. Schiebe gegründet; letztere gab durch ihren zweckmäfsigen Lehrplan dem Handelsschulwesen einen neuen Aufschwung.

3) Die älteste Gewerbeschule entstand 1817 zu Aachen; es folgte Frankfurt a. O. 1820, Königsberg i. Pr. 1821. Ihre Organisation erhielten sie in Preufsen durch den 1821 von Beuth ausgearbeiteten Lehrplan. Vgl. Schmidt, Encyklopädie II, 1045.

4) Vgl. Geisenheimer, Die preufs. Fachschulen, Breslau 1877. — Desgl. Schultheifs, Heft IV und V.

Zur Leitung des Schulwesens sind besondere Behörden eingesetzt, an die Schulamtskandidaten werden in den Prüfungen immer höhere Anforderungen gestellt, regelmäfsige Schulvisitationen sind angeordnet, der Schulbesuch aller schulpflichtigen Kinder wird mit Strenge überwacht. Gar sehr hat die Vergangenheit hinsichtlich der Besoldung der Lehrer gesündigt, in der Neuzeit suchen die Behörden auch die äufsere Lage der Lehrer erträglich und angemessen zu gestalten; schon viel ist in dieser Hinsicht geschehen, doch lange noch nicht genug.

Das in dieser Periode für die Methodik des Rechnens Neugeschaffene bezieht sich im wesentlichen auf den Elementarunterricht. Drei Grundsätze sind bezüglich dieser Stufe nach einander als oberste Principien alles Rechnens verfochten worden: Die Grundlage alles Rechnens ist die Anschauung (Pestalozzi 1803); die Grundlage alles Rechnens ist die allseitige Zahlbehandlung (Grube 1842); die Grundlage alles Rechnens ist das Zählen (Tanck und Knilling 1884).

§ 95. **Das Princip der Anschauung.** I. Pestalozzi. Pestalozzi, der Vater des modernen Erziehungswesens, ist der Name, an welchen sich auch die gänzliche Neugestaltung des elementaren Rechenunterrichts knüpft. Seiner Ansicht nach war die bisherige Unterrichtsweise zweimal eine verkehrte. „Es war eine Unterrichtsweise, die sich damit begnügte, das Gedächtnifs mit einem Wust von Namen und Sachen (= Regeln) zu überladen; ohne die Wechselwirkung dieser Seelenkraft mit der Einbildungskraft, die lediglich auf Anschauung beruht, zu beachten und zu benutzen, oder wohl gar alle Entwickelungsstufen des menschlichen Geistes überspringend unmittelbar den Verstand des Kindes in Anspruch nahm und ihn, wie unverdaulich auch die Speise war, mit lauter Gedankenhülsen, mit trocknen Analysen der Begriffe, mit Definitionen und Distinktionen übersättigte."[1]) Dem gegenüber betonte Pestalozzi, der Rechenunterricht habe an die Anschauung anzuknüpfen und die Übungen seien, den psychologischen Gesetzen gemäfs, auf jeder Stufe mit der Entwickelung der Denkkraft des Schülers in Übereinstimmung zu bringen. Vor Pestalozzi herrschte im Rechenunterrichte einseitige Objektivität, der Stoff wurde dem Schüler als eine abgeschlossene Kunst vorgeführt, die Ziffer war die Hauptsache. Pestalozzi fafste das Subjekt und dessen psychologische Entwickelung ins Auge, er abstrahierte vollständig von der Ziffer und behandelte nur die Zahl. Durch diesen Fortschritt vom Zeichen zur Sache erhob er das Rechnen zum wichtigsten Fache des Elementarunterrichts, zu dem es bis dahin nicht gehört hatte.

Zur herrschenden Ansicht über den Zweck des Unterrichts trat

1) Pestalozzi, Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse II, Vorrede.

Pestalozzi in direkten Gegensatz. Nicht Rechenfertigkeit, sondern Entwickelung und Stärkung der geistigen Kraft war sein Ziel. „Ich habe mit den Übungen dem Publikum nichts andres als durch praktische Anwendung entschieden bewährte Mittel zur Entwickelung, Übung und Bildung der Vernunftkraft in die Hand geben wollen. Der Zweck dieser Übungen ist durchaus kein andrer als der, die Vernunftanlage des Menschen zur Vernunftkraft zu erheben. Und es ist unrichtig, sie in dem engen Gesichtspunkte eines Mittels, die Kinder rechnen zu lehren, zu fassen. Diese Übungen sind nur Übungen der Kraft, der Kraft in der Anschauung reiner Verhältnisse." [1])

Genannte Übungen sind niedergelegt in den drei Heften der „Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse 1803", bearbeitet von Pestalozzis Schüler Krüsi. Die dazu gehörigen Anschauungsmittel sind drei Tabellen: Die Einheitentabelle und zwei Bruchtabellen, von denen jede ein Quadrat mit 100 quadratischen Zellen ist. Auf der Einheitentabelle sieht man zeilenweise zehnmal 1 Strich, zehnmal 2 Striche etc. bis zehnmal 10 Striche. Auf der ersten Bruchtabelle sind die obersten 10 Zellen ungeteilt; die 10 Zellen der zweiten Reihe sind durch vertikale Striche halbiert, die Zellen der dritten Reihe sind durch zwei Striche gedrittelt etc., die Zellen der untersten Reihe sind auf dieselbe Art in zehn gleiche Streifen geteilt. Auf der zweiten Bruchtabelle ist die eben beschriebene Teilung zweimal, horizontal und vertikal, ausgeführt. Will man sie herstellen, so teile man erst die Zellen nach Anleitung der ersten Bruchtabelle, drehe dann die Tabelle um 90° so, dafs die ungeteilten Zellen links stehen, und wiederhole hierauf die Teilung noch einmal. Die erste Zelle ist dann ungeteilt und die letzte zeigt 100 kleine Quadrate.

Pestalozzis Übungen. Das erste Heft lehrt in acht Übungen auf der Einheitentabelle die geometrischen Verhältnisse der ganzen Zahlen von 1 bis 100. Die erste Übung bezweckt die Orientierung auf der Tabelle, das Kind zeigt und spricht: „1 mal 1, 2 mal 1 etc.... bis 10 mal 10." — Die zweite Übung verwandelt die Einheiten in Zweier, Dreier ... Zehner; 540 Sätze, etwa von der Form: „19 mal 1 ist 9 mal 2 und 1 mal der halbe Teil von 2." Die dritte Übung verwandelt die Zweier in Dreier, die Dreier in Vierer etc., die Neuner in Zehner, immer mit Zurückgehen auf die Einheiten, in 440 Sätzen von der Art: „9 mal 9 und 8 mal der neunte Teil von 9 ist 89 mal 1, 89 mal 1 ist 8 mal 10 und 9 mal der zehnte Teil von 10." In der vierten Übung wird der *n*te Teil einer Zahl mit einer der ersten 10 Zahlen multipliciert, 729 Sätze von der Form: „3 mal der zehnte Teil von 100 ist 3 mal 10, 3 mal 10 ist 30." — Die fünfte

1) Anschauungslehre d. Zahlenverhältnisse III, Vorrede.

Übung bildet geometrische Verhältnisse mit ganzen Exponenten in folgender Form: „9 mal 1 ist 1 mal 9, 90 mal 1 ist 10 mal 9, folglich ist 1 mal 9 der zehnte Teil von 10 mal 9.“ — Die sechste Übung dehnt die Bildung geometrischer Verhältnisse auf gebrochene Exponenten aus, 360 Sätze von der Form: „12 ist 2 mal 6, 18 ist 3 mal 6, folglich ist 2 mal 6 zweimal der dritte Teil von 3 mal 6.“ — Die achte Übung bildet Proportionen.

Im zweiten und dritten Hefte (12 und 8 Übungen) sind auf den Bruchtabellen die Brüche behandelt. Die erste Bruchtabelle veranschaulicht die Brüche mit den Nennern 2 bis 10, die zweite diejenigen mit den Nennern bis 100. Auf der Einheitentabelle ist die Einheit durch den Strich, auf den Bruchtabellen durchs Quadrat dargestellt. — Die erste Übung auf der ersten Bruchtabelle lehrt die Entstehung der Brüche aus der Einheit. Die zweite Übung verwandelt Bruchteile in Ganze und umgekehrt, 540 Sätze von der Form: „49 Fünftel sind 9 Ganze und viermal der 5te Teil von 1 Ganzen.“ Die dritte Übung bildet Verhältnisse aus gleichnamigen Brüchen, 17 280 Sätze von der Form: „17 Halbe sind 2 mal 7 Halbe und dreimal der 7te Teil von 7 Halben.“ Die vierte Übung lehrt die Entstehung des Bruchs aus mehreren Ganzen. Die fünfte Übung multipliciert die Brüche, z. B. 10 mal der 4te Teil von 7 Ganzen sind 10 mal 7 Viertel, 10 mal 7 Viertel sind 70 Viertel, 70 Viertel sind 17 Ganze und 2 Viertel. Die sechste Übung umfafst (5400 Sätze) Multiplikationen und zwar als umgekehrte Divisionen. Die siebente Übung lehrt aus Produkt und einem Faktor den anderen suchen. Die achte bis zwölfte Übung bilden Proportionen; z. B. „Zu welcher Anzahl von Ganzen verhalten sich 7 Ganze und 2 Neuntel, wie sich 3 Ganze und 5 Neuntel zu 32 Ganzen verhalten?“ Lösung: „$7\frac{2}{9}$ verhalten sich zu 9 mal $7\frac{2}{9}$, wie sich 3 Ganze und 5 Neuntel zu 9 mal $3\frac{5}{9}$ verhalten; $9 \times 7\frac{2}{9} = 65$, und $9 \times 3\frac{5}{9} = 32$, folglich verhalten sich 7 Ganze und 2 Neuntel zu 65, wie sich $3\frac{5}{9}$ zu 32 verhalten.“

Die acht Übungen auf der zweiten Bruchtabelle umfassen das Erweitern und Kürzen eines Bruches. Dann folgt die Division der Brüche durch ganze Zahlen und die Multiplikation zweier Brüche. Hieran schliefst sich wieder die Bildung von geometrischen Verhältnissen und von sechs Arten Proportionen.

Das ist die vielgepriesene „Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse“; das alles wurde ohne Gebrauch der Ziffer auf den Tabellen vorgenommen, dabei hatte ein Ausspruch des Schöpfers jener wunderlich klingenden Übungen das lückenlose Fortschreiten von Übung zu Übung, von Satz zu Satz zur unerbittlichen Pflicht gemacht. „Um aber das Kind zu dem bestimmten Grade der Denkkraft, welche die richtige Beantwortung der hier vorkommenden Fragen voraussetzt, zu führen, mufs man von der ersten

Übung der Tabelle an bis zu dieser achten niemals zu einer zweiten vorrücken, bis das Kind zur unbedingten Fertigkeit in der vorhergehenden gelangt ist, oder bis die Anschauungen, auf welchen die Beantwortung einer jeden Frage beruht, in ihm zum unauslöschlichen Bewufstsein gebracht sind."[1])

Anerkennung fand nur das Pestalozzische Princip, alles andre nicht. Die Übungen und Tabellen verwarf man; die Erhebung der formalbildenden Kraft der Zahlenübungen zum Hauptziel des Rechenunterrichts und die Hintansetzung der Rechenfertigkeit erklärte man für Irrtümer, nur den Grundsatz der Anschaulichkeit hat man hoch gehalten bis auf diesen Tag.

Kritik. Gegen die Übungen ist geltend zu machen: Der dekadische Aufbau unseres Zahlensystems, der doch so viele Rechnungsvorteile in sich schliefst, wird garnicht berührt; Addition, Subtraktion und Division treten nicht als gesonderte Übungen auf, nur die Multiplikation wird gepflegt; das sprachliche Beiwerk erstickt fast die Hauptsache in den Sätzen, nämlich die arithmetische Wahrheit; der Gebrauch der Ziffer tritt viel zu spät, das Rechnen mit benannten Zahlen garnicht ein. „Die Übungen an der Einheitstabelle gehören zu dem Ungeheuerlichsten, Bizarrsten, Extravagantesten und Vertraktesten, was auf dem Gebiete der Unterrichtsmethode jemals produciert wurde."[2]) Wir meinen, dafs vorstehende Worte (geschrieben 1884) nicht von derjenigen Pietät eingegeben sind, welche die Nachwelt dem gröfsten Pädagogen und Menschenfreunde ihres Jahrhunderts schuldig ist.

Die Pestalozzischen Tabellen entbehren der durch die Zahl selbst indicierten wesentlichsten Eigenschaft eines Anschauungsmittels für die Zahl, nämlich der Veränderlichkeit. Die Zahlen sind der Veränderung fähig und alles Rechnen läuft auf ein Kombinieren gegebener Zahlen zu neuen hinaus, demgemäfs mufs auch das Anschauungsmittel veränderlich und kombinationsfähig sein. Pestalozzis Tabellen tragen aber das Gepräge vollendeter Starrheit. — Dazu kommt der Umstand, dafs sie in ihrer fertigen Gestalt mehr enthalten als jeweilig gebraucht wird, wodurch sie die Konzentration der Aufmerksamkeit auf einen Punkt hindern. Schliefslich ist die vermeintliche Anschauung zum grofsen Teile ein leerer Wahn. Denn der Zahlbegriff wird garnicht durch Anschauung, sondern durch den Zählakt gewonnen. Wir können einen Haufen Markstücke, Eier, Gurken, Nüsse, Stimmzettel etc. noch so lange und noch so aufmerksam betrachten, ansehen, „anschauen", wir erfahren dadurch keineswegs die Anzahl der Einheiten, dazu ist das Zählen nötig. Kenntnis des Einmaleins kürzt den

---

1) Anschauungslehre d. Zahlenverhältnisse .. I. Heft, Schlufsbemerkung.
2) Knilling, Reform d. Rechenunterrichts I, 58.

Zählakt ab, sobald die Einheiten gruppenweis, zu Zweien, Dreien, Vieren, Fünfen, geordnet sind. Mehr als fünf Einheiten oder Teilungen können wir überhaupt nicht anders als abteilungsweise „übersehen“, durch den Anblick der Skalen auf Instrumenten kann man sich von dieser Thatsache überzeugen; die Einschaltung längerer Teilstriche gewährt die nötigen Ruhepunkte und diese ermöglichen erst die Übersicht. — Wer nicht weifs, dafs das letzte Quadrat der Pestalozzischen zweiten Bruchtabelle in 100 kleine Quadrate geteilt ist, erfährt es durchs Anschauen nicht.

Wie entzückt Pestalozzi anfangs von seinen Tabellen war, beweist folgender Ausspruch: „Wenn mein Leben einen Wert hat, so besteht er darin, dafs ich das Quadrat zum Fundament einer Anschauung erhob, die das Volk nie hatte“; wie gering er aber später von ihnen dachte, zeigt der folgende: „Dem Schüler auf einmal eine Tabelle zu zeigen, die zehnmal 1, zehnmal 2 bis zehnmal 10 Striche enthält, ferner eine zweite Tabelle für die einfachen Brüche, die 10 einzelne Quadrate, hernach 10 Quadrate, wovon jedes halbiert, und so weiter bis zu 10 Quadraten, wovon jedes in 10 gleiche Theile getheilt ist, darstellt, und endlich eine dritte Tabelle für die doppelten Brüche, die auf die nämliche Art, wie die Tabelle der einfachen Brüche einfach, doppelt getheilt ist, ist nicht geeignet, sein Anschauungsvermögen zu entwickeln, was doch im Anfange so nothwendig ist. Die Ausdehnung der Anschauungsgegenstände soll eine Folge der Entwickelung der Anschauungskraft sein. Das, was wir in den Tabellen vor uns sehen, wäre das letzte, was man diesfalls dem Schüler vorlegen dürfte.“ [1])

Die formalbildende Kraft der Pestalozzischen Zahlenübungen wurde begründet durch die Art der Durchführung des Princips. Konsequenz, Stufenmäfsigkeit und Lückenlosigkeit sind in die Augen springend; doch Einfachheit, Leichtigkeit und Bündigkeit fehlen. Dadurch, dafs auf die Benutzung bereits gewonnener Resultate verzichtet und immer wieder auf die Einheiten zurückgegangen wird, entsteht die überaus lästige Weitläufigkeit. Durch die ungeheure Ausdehnung wird die so nötige Strenge in der Lückenlosigkeit der Übungen zur marternden Fessel für die nicht minder nötige Freiheit. Pestalozzis Unterrichtsordnung gestattet kein Eilen, kein Weilen; sie hebt die freie Mitteilung des Lehrers an den Schüler und umgekehrt auf. Die Wechselwirkung, der Ideentausch, das Auffassen, das Berichtigen, das Fortbilden der Ideen im Kinde, das Üben der Kraft an jedem vom Zufall oder vom Lehrer herbeigezogenen Gegenstande: das alles fällt fort, wo ein unerbittliches Gesetz jeden belebenden Zwischen-

1) Pestalozzis sämtliche Schriften, Seyffarths Ausgabe, Stuttgart 1826 XIV, 134.

edanken zurückdrängt. — Schliefslich läfst sich einwenden, dafs Pestaozzis Rechenübungen gar keine wahre Verstandesübung enthalten. Es findet weder ein Subsummieren besonderer Fälle unter allgemeine Sätze, noch ein Generalisieren, eine Abstraktion allgemeiner Sätze und Methoden aus Einzelurteilen, noch ein Schliefsen statt. Was von der Einheit gesagt wird, gilt zweimal von der 2, dreimal von der 3 etc. lückenlos bis zehnmal von der 10. Diese Arbeit ist kein Schliefsen, sondern ein einfaches Weiterzählen. Wenn ich einen Schlufs auf 10 brauche und ich mufs vorher die gleichen Schlüsse für 1, 2 bis 9 thun, so wird diese lückenlos fortschreitende Schlufsweise zum mechanischen Zusammenzählen. Die Pestalozzische Methode[1]) ist daher weniger eine Übung der Denkkraft, als vielmehr ein logischer Mechanismus, weil sie nur die allereinfachsten logischen Gesetze unaufhörlich übt, nämlich von 1 auf 2, von 2 auf 3 etc. zu schliefsen.

Die Unvollkommenheit seiner Rechenübungen erkannte Pestalozzi in den späteren Lebensjahren selbst und es war sein Wunsch, andre möchten vollkommener gestalten, was er mangelhaft liefs. „Oft sagte er mir, dafs er das Ganze nur als einen empirischen Versuch betrachtet wissen wolle, über dessen Werth oder Unwerth die Erfahrung entscheiden müsse; dafs er zwar seine Hauptgrundsätze für unbezweifelt wahr, aber die Versuche ihrer Anwendung für unvollendet und einer ungleich höheren Vervollkommnung fähig halte, als er ihr bis jetzt gegeben habe. Er nährt die Hoffnung, dafs Andere, und wenn auch in neuen Formen, vollenden werden, was er bei seinem Alter nicht mehr zu vollenden vermöge.“[2]) — Der Wunsch des Meisters wurde erfüllt; die besten Pädagogen und hochgestellte Schulmänner widmeten der Vervollkommnung der Pestalozzischen Methode ihre Kraft. Wir gedenken ihrer Erfolge unter dem Titel:

II. Die Nachfolger Pestalozzis. Pestalozzi gewann durch die Wärme des Gemüts, durch die edle Hingabe an den Beruf und die Hoffnungsfreudigkeit, mit der er seine Ideen verkündete, alle Kreise. Wie ein Lauffeuer verbreitete sich sein Ruf über ganz Deutschland; aus allen Gauen pilgerten jetzt, wie zu den Zeiten Bruns' nach Rekan, die Pädagogen[3]) nach Ifferten, um zu sehen und zu lernen. Mit Pestalozzi begann die Zeit der Schwärmerei für unseren Unterrichtsgegenstand. Schwärmerei schadet ja überall, indem sie der Sache eine gröfsere Wichtigkeit beilegt als ihr

---

1) Zur Kritik darüber vgl. Niemeyer, Grundsätze d. Erziehung u. d. Unterichts 1810, III, 393—476. Desgl. Hoffmann, Die Pestalozzische Zahlenlehre ... 810. Desgl. Knilling, Zur Reform des Rechenunterrichts 1884, I, 44 ff.

2) Passavant, Darstellung u. Prüfung d. Pestal. Methode, Lemgo 1804 S. 13.

3) Raumer, Gesch. d. Pädag. II, 424 zählt über 40 nachmals berühmte chulmänner auf, welche als Gäste in Ifferten erschienen.

zukommt, indem sie über das rechte Ziel hinauswill und bezüglich der Mittel nur selten die glücklichste Wahl trifft. Am empfindlichsten rächt sie sich auf dem Gebiete des Unterrichts. Hier offenbart sie sich in der Anstrebung unmöglicher Ziele und führt zur Zeitverschwendung, zum nutzlosen Kraftverbrauch und zur Überbürdung der Schüler.

Zweierlei Art sind die Jünger Pestalozzis. Die einen, ihrem grofsen Lehrer sklavisch folgend, klammern sich fest an die Tabellen und führen gewissenhaft die Übungen durch, über welche der Meister selbst den Stab gebrochen hat. Da sie nichts ändern am Systeme, kommen sie auch keinen Schritt weiter. Die andern, den Geist der Methode erfassend, bessern und bauen aus, was der Meister unvollkommen liefs; sie allein sind für die weitere Entwickelung von Bedeutung. Erstere, zu denen Gruner, Götz, Kawerau gehören, übergehen wir.

Die beiden Angelpunkte der Pestalozzischen Methode: die Anschauung als Grundlage und die formale Bildung als wesentlichstes Ziel, wurden von allen unverrückt festgehalten.

Eine Umarbeitung der Pestalozzischen „Anschauungslehre der Zahlen“ lieferte Schmid, ein Mitarbeiter am Institut zu Ifferten, in dem Werkchen „Elemente der Zahl (1810)“. Schmid verliefs das Quadrat und brauchte als Realzeichen nur die Linie. Für jede Übung gab er ein spezielles, kleines Täfelchen, wodurch freilich das Tabellenmaterial (in jenem Buche) auf sieben Bogen anwuchs. Zu geeigneter Zeit entsagte er dem Gebrauche des Anschauungsmittels ganz; auf die gerühmte Lückenlosigkeit legte er keinen Wert.

Eine selbständige Bearbeitung des Rechenunterrichts nach Pestalozzischen Grundsätzen brachte zuerst Tillich, Direktionsmitglied eines Knabeninstituts zu Dessau: „Anleitung zur Rechenkunst, drei Teile 1806.“ Das Ziel seines Unterrichts ist „rechnend denken und denkend rechnen“ zu lehren, der Weg dazu ein methodischer und systematischer Gang, ein langsames, besonnenes und stufenweises Fortschreiten. Das Kopfrechnen (gelehrt im ersten Teile) steht im Vordergrunde, weil die Kopfarbeit beim Rechnen die Hauptsache sei und die schriftliche Rechnung immer nur als Hilfsmittel fürs Gedächtnis angesehen werden müsse, das nicht imstande sei, allzu grofse Zahlenreihen zu behalten. Zur Einführung in das Wesen aller arithmetischen Operationen benutzte er nur das Zahlengebiet von 1 bis 10. Das bei den Einern Gelernte übertrug man auf die Zige[1]), Hunderter, Tausender. Die Kopfrechnungen wurden hin und wieder auch schriftlich durch willkürlich gewählte Zeichen (Striche, Punkte — aber

1) Z. B. „Bei $3 \times 30$ zu sagen: $3 \times 3 = 9$ und die Null angehängt, giebt 90, das macht die Sache nicht deutlich; es mufs heifsen $3 \times 3$ Zig $= 9$ Zig.“

nicht Ziffern) dargestellt. — Das schriftliche Rechnen (im zweiten Teile) ist ganz kurz behandelt, weil ihm nur eine untergeordnete Bedeutung beigelegt wurde. — Der dritte Teil enthält den Stufengang der Übungen und die Beschreibung des methodischen Verfahrens.

Die Fortschritte Tillichs gegen Pestalozzi bestehen: erstens in der Wahl eines zweckmäfsigeren Anschauungsmittels, zweitens in der Gründung des Stufenganges der Übungen auf die Zehnerordnung des Zahlensystems und drittens in der beim Fortschreiten in den Übungen gewährten Freiheit. Tillichs Anschauungsmittel sind 100 Hölzer, gerade Prismen mit quadratischer Basis, und zwar 10 zehnzollige, 10 neunzollige etc. 10 einzollige oder Kuben. Der Kubus repräsentierte die Einheit, das zehnzollige Prisma die 10. Operiert wurde damit auf folgende Art, beispielsweise mit dem Achterprisma: Man stellte dieses auf und daneben so viele kleinere (entweder gleichgrofse oder verschiedene) auf einander, bis die gleiche Höhe mit dem Achterprisma erreicht war; dann sah man nach, was man hatte, und fand etwa: 8 Einer oder 4 Zweier oder 2 Vierer oder 1 Fünfer und 1 Dreier etc.; schliefslich brachte man behufs Gewinnung der arithmetischen Wahrheiten die gefundenen Ergebnisse in die gehörige sprachliche Form (etwa: $5 + 3 = 8$, $8 - 5 = 3$, $8 \times 1 = 8$, $2 \times 4 = 8$, 2 ist in 8 viermal enthalten etc.). — In der Kombinationsfähigkeit der Tillichschen Hölzer liegt ihr Vorzug vor den Pestalozzischen Tabellen.

Die Betonung der Zehnerordnung gegenüber dem immer erneuten Zurückgehen auf die Einheit nach Pestalozzischer Weise begründete Tillich damit, dafs es bei grofsen Zahlen schlechterdings unmöglich sei, sich aller ihrer Einheiten insbesondre bewufst zu werden, dafs dieses vielmehr nur gruppenweis geschehen könne. Die Mittel zur gruppenweisen Vorstellung der Zahlen (nach Einern, Zigen, Hunderten etc.) gebe der dekadische Aufbau des Zahlensystems selbst an die Hand. Die gehörige Benutzung dieser Mittel, sowohl bei der Zahlvorstellung wie auch in dem Stufengange der Übungen, sei die Ausdehnung des Princips der Naturgemäfsheit der Methode, welches Pestalozzi ausschliefslich in Rücksicht auf das Subjekt des Unterrichts (das Kind) durchgeführt habe, auch auf das Objekt des Unterrichts (das Fach); und die Naturgemäfsheit der Methode bezüglich des Objekts sei nicht minder notwendig als die bezüglich des Subjekts.

Die so nötige Freiheit beim Fortschreiten in den Übungen erreichte Tillich dadurch, dafs er diese von Stufe zu Stufe nur andeutete und nicht in lückenloser Reihenfolge, wie Pestalozzi that, vorschrieb.

Bezüglich der Einführung der Pestalozzischen Methode in die Schulen ging Bayern voran, wo im Anfange dieses Jahrhunderts der Kirchen- und Schulrat Stephani seine für die Hebung des Schulwesens so segensreiche

Thätigkeit[1]) entfaltete. — Schon 1804 benutzte das bayerische „General-Schul- und Studiendirektorium“ in dem Lehrplane[2]) für Volksschulen das durch Pestalozzi hervorgerufene pädagogische Schlagwort des 19. Jahrhunderts „Anschaulichkeit“; die für die Unterklasse getroffenen Bestimmungen lauten daselbst: „a) Anschauliche Entwickelung der Begriffe Einheit und Mehrheit, b) Zählübungen von 1 bis 10 und dann bis 100 vor- und rückwärts, c) leichte Beispiele vom Vermehren und Vermindern der Zahlen als Grund eines anschaulichen Einmaleins“ etc. — 1809 führte man die Pestalozzische Methode durch das „Allgemeine Regulativ[3]) für die Ordnung der Lehrerseminare“ auch in den bayerischen Seminaren ein: „Die Hauptforderung in Ansehung der Lehrform — heifst es dort — besteht darin, dafs es jederzeit als die Hauptaufgabe zu betrachten sei, das Nachdenken der Lehrlinge zu erwecken, die Denkkraft und Beobachtungsgabe derselben zu üben und den Geist zu freiem und vielseitigem Gebrauche seiner Kräfte zu stärken. Diese Aufgabe ist nicht anders als dadurch zu lösen, dafs alles blofs mechanische Einlernen sorgfältig vermieden und unnachlässig darauf gedrungen werde, alle Lehrgegenstände zu einer lebendigen Anschauung zu bringen. Da nun diese rücksichtlich der Form des Unterrichts hier eben aufgestellte Hauptforderung das Wesen der Pestalozzischen Lehrmethode zugleich enthält und das Hauptverdienst der erwähnten Lehrart unstreitig darin besteht, mit Eifer darauf zu dringen, dafs der Unterricht für die unteren Volksklassen von dem geisttötenden Mechanismus endlich befreit werde, so ist klar, wiefern auch auf die Forderungen der Pestalozzischen Methode in dem Unterrichte der Seminare Rücksicht zu nehmen ist.“ — Stephanis Verdienste um den Rechenunterricht werden in den Geschichtswerken über Pädagogik in der Regel damit charakterisiert, dafs man sagt, er habe das „Denkrechnen“[4]) in die Schule eingeführt. Er wollte das Bestehende nicht — wie die strengen Pestalozzianer — revolutionsmäfsig umstürzen, sondern nur das Unvollkommene bessern und das Neue nach Möglichkeit mit dem Alten vereinigen. Noch etwas Neues aufstellen wollen, sei Thorheit; das Vorhandene bessern sei die einzige noch übrige Arbeit. Eine solche Sprache wirkt ja immer, auch der am Alten Hangende schenkt ihr Gehör. Stephanis Verbesserungen des Rechenunterrichts bestehen nach seinen eignen Worten darin: „1. dafs ich das höchste Princip der Unterrichtskunst: behandle jeden Gegenstand als einen Stoff, an welchem sich die

1) Siehe darüber Schmidt, Encyklopädie IX, 178—186.

2) Wörtlich abgedruckt in Heppe, Gesch. d. Volksschulw. IV, 48.

3) Vollständig abgedruckt in Heppe IV, 56.

4) Stephani, Ausführliche Anweisung zum Rechenunterricht in Volksschulen nach der bildenden Methode 1816.

Kräfte deiner Schüler selbstthätig für den Zweck ihres Daseins entwickeln müssen, auf die Zahlenkunde aufs genaueste anzuwenden suchte; die Rechenkunst erscheint hier als eine Aufgabe für den jugendlichen Geist, die Zahlenwelt seiner Selbstkraft unterwürfig zu machen; für meine Rechenschüler giebt es noch kein Zahlensystem, sondern sie müssen zur Begründung ihrer Geistesherrschaft dieses neue Reich sich selbst schaffen und ordnen; 2. dafs ich überall dafür sorgte, die Lehrer in den Stand zu setzen, sich dessen, was sie hier zu leisten haben, deutlich bewufst zu werden; 3. dafs ich die bisherigen fünf Rechenspecies (mit Numerieren) durch eine neue, das Ponderiren, vermehrte; diese einzige kleine Lücke war auszufüllen, um dem bisherigen Systeme der Rechenkunst seine Vollendung und dadurch ewige Haltbarkeit zu geben; durch diese neue Species wird der Mechanismus im Rechnen völlig vernichtet und die Rechenkunst zu einem leichten Spiel des jugendlichen Geistes erhoben; 4. dafs ich den Rechenunterricht richtiger abgestuft habe wie es der Gegenstand erfordert." Stephanis Lehrplan ist für die dreiklassige Volksschule zugeschnitten, hat also drei Cursus. — I. Cursus: „Zahlenrechnen" d. h. Kopfrechnen, ohne Gebrauch der Ziffern; a) im Numerieren bauen die Schüler das unendliche Zahlensystem selbst auf, wozu die Finger als Anschauungsmittel Verwendung finden; b) das Ponderieren ist das Ermessen der Einheiten einer mehrzifferigen Zahl durch Zerlegung in Summanden nach der Zehnerordnung, etwa $347 = 300 + 40 + 7$; c) hierauf folgt die Einübung der vier Species mit kleinen Zahlen. Der erste Cursus, das mündliche Verfahren, bildet nach Stephani (und mit Recht) das sichere Fundament für den gesamten Rechenunterricht. — Der II. Cursus, „Zifferrechnen", ist dem ersten bezüglich des Inhalts und der Anordnung ganz konform; was man gelernt hat, im Kopfe zu vollziehen, wird nun schriftlich dargestellt und durch Herbeiziehung gröfserer Zahlmassen erweitert. — Im III. Cursus, „die bürgerliche Rechenkunst", d. i. die Anwendung der erlangten Fertigkeit auf die im bürgerlichen Leben vorkommenden Aufgaben, findet man Beispiele aus dem Geschäftsverkehr, der Geographie, der Geschichte etc.

Was Stephani für das südliche Deutschland war, wurde von Türk[1]) für das nördliche. Sein „Leitfaden zur zweckmäfsigen Behandlung des Unterrichts im Rechnen" (von 1816—1824 vier Aufl.) ist ein methodisches Handbuch und ein Lehrplan und leistet daneben durch die Form des Dialogs angehenden Lehrern wichtige Dienste. Als Ziel ist die Ver-

1) v. Türk, 1776—1846, ist einer von den berühmten Schulmännern, welche die preufsische Regierung im Anfange dieses Jahrhunderts aus fremden Staaten in ihre Dienste zog. Er wurde 1806 aus Meiningen zum Konsistorialrat nach Potsdam berufen.

einigung der Denkübung mit der Rechenfertigkeit hingestellt. Der Lehrplan ist ebenso wie der Stephanische durch die weitgehende und wohlgelungene Gliederung des ganzen Lernstoffs ausgezeichnet.

Zurückschauend auf die „Nachfolger Pestalozzis" erkennt man, dafs die Pädagogen Deutschlands das neue Bildungsmittel und die wunderlich klingenden Übungen Pestalozzis in eine zweckmäfsigere Form und in gehörigen Einklang mit den übrigen Materien des Rechenunterrichts brachten, dafs sie die Vorteile der alten Unterrichtsweise mit denen der neuen verbanden und dadurch eine Methode gewannen, nach welcher der Rechenunterricht in den Schulen erfolgreich betrieben werden konnte.

III. Diesterweg. Pestalozzi und seine Schule schufen einen Gegensatz zwischen Kopf- und Zifferrechnen (oder mit der Bezeichnung andrer: zwischen subjektiver und objektiver Methode, zwischen Subjektivität und Objektivität, zwischen formalem und materiellem Princip); die Ausgleichung dieses Gegensatzes knüpft sich an den Namen Diesterweg.[1]) Indem er den Satz aufstellte: „es giebt nur ein Rechnen, nämlich ein Rechnen mit Verstand", hob er den so stark betonten Unterschied zwischen Kopf- und Zifferrechnen vollständig auf. „Unterrichte so, dafs auf jeder Stufe die Selbstthätigkeit des Schülers ausgebildet werde", stellte er als oberstes Princip für die Methodik des Zahlenunterrichts hin. Er gewann es dadurch, dafs er den Zustand des Kindes (vorherrschende Receptivität) mit dem des vollendeten Mannes (vorherrschende Spontaneität) verglich. Dies Princip nötige aber dazu, stets auf vollkommene Einsicht zu dringen, und der einzige zu diesem Ziele führende Weg sei die heuristische Methode.

Wir teilen die Diesterwegsche Theorie der Methodik fürs Rechnen nach dem „Wegweiser für deutsche Lehrer" (1835 und später) mit, da sie dort kürzer und bündiger gefafst ist als im methodischen Handbuche. „Jeder bildende methodische Unterricht verlangt einen Stufengang nicht nur im allgemeinen, sondern auch in der Art, dafs das Vorhergehende das Folgende vollständig begründe, unmittelbar zu demselben hinführe. Für die mathematischen Disciplinen sind fester Zusammenhang, übersichtliche Anordnung und sichere Begründung unerläfsliche Eigenschaften. Für alle Stufen müssen folgende Regeln gelten. 1. Die Entwickelung der Sache, die richtige Erkenntnifs, die Klarheit der Auffassung ist überall das Erste; die Übung das Zweite; die Anwendung das Dritte. 2. Die richtige Auffassung wird immer auf dem Wege der Anschauung, der äufseren und inneren, gewonnen. 3. Aus der richtigen Auffassung einzelner Beispiele findet der Schüler die Regel, das Gesetz, das durch vollkommen

1) Diesterweg und Heuser, Method. Handbuch für den Gesammtunterricht im Rechnen. 1839 3. Aufl.

richtigen Ausdruck dargestellt wird. 4. Auf jeder Stufe wird zuerst das Neue rein für sich betrachtet, dann mit dem Vorhergehenden in Verbindung gebracht. 5. Auf jeder Stufe wird so lange verweilt, bis der Schüler Fertigkeit in der Übung und Anwendung gewonnen hat. 6. Allenthalben wird das Rechnen mit unbenannten Zahlen mit dem angewandten Rechnen verbunden. Das Eine ist so nothwendig als das Andere. 7. Der Gebrauch der Ziffer folgt unmittelbar auf die Übung mit reinen Zahlenvorstellungen. 8. Erst mündlich, ohne sichtbare Zeichen, dann schriftlich. Beides ist Denkrechnen. 9. Die angewandten Aufgaben haben vorzüglich das übliche Münz-, Mafs- und Gewichtsystem zu berücksichtigen. An den Grenzen zieht man auch das Fremde heran. 10. Auf vollständig genauen, deutlichen mündlichen Ausdruck wird überall ein entschiedener Wert gelegt. Es kommt nicht nur darauf an, dafs die Schüler das richtige Resultat finden, sondern sie müssen auch den Gang der Entwickelung in reinem und geläufigem Deutsch darstellen können. 11. Auf allen Stufen leite man die Schüler an, selbst solche Aufgaben zu bilden, welche dahin gehören." — Diesterwegs Normen wurden bleibende.

Die von Diesterweg bearbeiteten Rechenbücher galten als Musterbücher. Das „Praktische Rechenbuch für Elementar- und höhere Bürgerschulen" besteht aus drei Übungsbüchern, von denen das erste für gehobene Elementarschulen, das zweite für gehobene Bürgerschulen ausreicht, das dritte über die gewöhnlichen Bedürfnisse hinausgeht. Das „Praktische Rechenbuch für die untern und mittlern Klassen der Elementarschulen, sowie für Mädchenschulen" enthält nur das Unentbehrlichste. Das obengenannte methodische Handbuch ist der Kommentar zu den Rechenbüchern. Wir gedenken aus dem praktischen Teile nur der ersten Zahlübungen und der Lösungsweise der Regeldetriaufgaben. Das Zahlengebiet wird in Abteilungen (1—10, 1—100, 1—1000) behandelt; anfangs übt man im Anschlusse ans Aufwärts- und Abwärtszählen nur Addieren und Subtrahieren. Erst nach erlangter Fertigkeit in diesen Species (bis 1000) treten die Multiplikation und Division hinzu. In dem Gange der Übungen herrscht eine strenge und für den Schüler leicht erkennbare Ordnung, so figurieren beispielsweise die Einer der Reihe nach als Addenden, dann als Subtrahenden, dann als Multiplikatoren, dann als Divisoren. Dadurch wird dem Schüler zugleich Einsicht in den Gang des Fortschritts verschafft und diese bildet; denn intellektuelle Bildung besteht weniger im Wissen des Einzelnen als in der Erkenntnis des Zusammenhangs. Für die schriftliche Ausrechnung wird nirgends eine Regel gelehrt; die verschiedenen Vorschläge der Schüler führt der Lehrer aus und acceptiert den besten. Diesem Streben gemäfs verwarf Diesterweg auch den Dreisatz und die Proportionen und löste die einschlagenden Aufgaben im

Anschlusse an die Multiplikation und Division benannter Zahlen durch Zurückführung auf die Einheit. Weil das praktische Leben die Aufgaben nicht in wissenschaftlicher Form darbiete, so dürfe man sie auch nicht nach wissenschaftlichen Regeln, den Proportionen, lösen. „Die auf die Lehre von den Proportionen gegründete Rechnungsweise ist in den Elementarschulen überflüssig und schädlich; jenes, weil alle Zwecke auch ohne sie erreicht werden können, dieses, weil ihre Anwendung den meisten Schülern nicht deutlich wird.“[1])

Der Bruchsatz (zuerst von Stern[2]) 1832 als Zweisatzrechnung dargelegt), dessen Ansatz zugleich als Resultat — nur noch nicht in einfachster Form — darstellt, hat den Sieg über alle allgemeinen Lösungsmethoden davongetragen. Er gilt gegenwärtig als das leichteste, natürlichste und schnellste Verfahren zur Lösung derjenigen Aufgaben, deren Resultat durch Multiplikation und Division gefunden werden kann. Er begnügt sich in der That mit Sätzen, die der Aufgabe selbst entnommen sind, und bedarf nicht des unwandelbaren „verhält sich“ wie die Proportion, wobei gar leicht Gedankenstillstand eintritt. Daneben ist er durch Aufnahme der Brüche und Aufschub der Rechnung grofser Bündigkeit fähig. — Heuser zerstörte etwaige falsche Vorstellungen betreffs des Neulings, indem er mit Recht betonte, dafs bei näherer Betrachtung der Zweisatz sich als verkappter Dreisatz entpuppe und genau so viele Überlegung und Rechnung erfordere als dieser. Gleichwohl erhalte die Methodik durch ihn einen Gewinn. „Was hie und da einzelne Lehrer theils wie vom Instinct getrieben, andere mit Überzeugung anwendeten — ein Verfahren, welches das ganze ununterrichtete Volk allgemein übte — das beginnt endlich allgemein von der Methodik als naturgemäfs und zweckmäfsig anerkannt zu werden.“[3])

Verbindung des reinen und angewandten Rechnens und die Befreiung der sogenannten „bürgerlichen Rechnungsarten“ vom abstrakten Regelwerk sind die wesentlichsten Errungenschaften Diesterwegs in der Methodik des Rechenunterrichts.

§ 96. **Das Princip der allseitigen Zahlbehandlung.** Bis in unser Jahrhundert hinein ordnete man den Gang im Rechenunterrichte nach den Species, man lehrte zuerst Addieren, dann Subtrahieren, dann Multiplicieren, dann Dividieren. Dabei spielte in früheren Zeiten die Gröfse der Zahlen fast gar keine Rolle; zumal da vor den Species das Lesen und Schreiben sehr grofser Zahlen erledigt wurde. Später hielt man (die

1) Diesterweg, Method. Handbuch S. 147.

2) Stern, Lehrgang des Rechenunterrichts nach geistbildenden Grundsätzen, 1832 und später.

3) Diesterweg, Method. Handbuch S. 35.

Philanthropen) es für angemessen, zur Betreibung der Species engere Grenzen zu wählen (1 bis 10, 1 bis 100, 1 bis 1000, 1 bis $\infty$), und diese successive zu erweitern. Überall aber blieb die Ordnung der Species herrschend. — Diesterweg und nach ihm Stern nahmen auf der untersten Unterrichtsstufe mit jeder der ersten neun Zahlen die vier Species durch d. h. sie betrachteten jede von den genannten Zahlen als Addend, Subtrahend, Multiplikator und Divisor, und zwar in den ihnen entsprechenden Gebieten (1 im Gebiete von 1 bis 10, 2 im Gebiete von 2 bis 20, . . . 9 im Gebiete von 9 bis 90).

Die Idee[1]), auf der ersten Unterrichtsstufe jede Zahl als ein Individuum zu betrachten und an ihr alle Operationen der vier Species zu vollziehen, ging von Grube[2]) aus. Er erklärte die allseitige Zahlbehandlung, ausgedehnt auf die ersten hundert Zahlen, für die Grundlage alles Rechnens.

Sein Unterrichtsprincip fand Grube dadurch, dafs er die Frage: auf welche Weise das Kind eine vollständige Vorstellung von dem Wesen einer Zahl d. h. von der Gesamtheit ihrer Eigenschaften gewinne, erörterte. Das Resultat dieser Erörterung war, dafs man zu diesem Zwecke alle Merkmale der Zahl aufsuchen, d. h. alle möglichen Veränderungen mit ihr vornehmen müsse. Er schreibt[3]): „Das elementare Rechnen nach den Species auseinander fallen zu lassen ist dasselbe, als im Anschauungsunterrichte dem Kinde die Gegenstände nach den Rubriken von Gröfse, Gestalt und Farbe etc. vorzuführen, oder die Botanik nach dem Linnéschen Systeme zu beginnen. Wie aber das Kind den Gegenstand nicht kennen lernt, wenn es nach einem Merkmale verschiedene Gegenstände anschaut, sondern wenn es den einen Gegenstand nach seinen verschiedenen Merkmalen betrachtet, so lernt der Schüler auch z. B. die Zahl 4 nicht kennen, nämlich mit wahrer Durchdringung des Objekts, wenn er heute $2 + 2 = 4$ lernt und nach einigen Wochen, wenn das Subtrahiren an die Reihe kommt, $4 - 2 = 2$ etc. Vielmehr hat er ja, wenn er weifs, dafs $2 \times 2 = 4$, damit zugleich die andern Anschauungen: $2 + 2 = 4$, $4 - 2 = 2$, $4 : 2 = 2$; und die Methodik hat Unrecht, wenn sie diesen objektiven Zusammenhang nach den Operationen zerreifst. Eine solche

---

1) Grube, Leitfaden für das Rechnen in der Elementarschule nach den Grundsätzen der heuristischen Methode 1842 (2. Aufl. 1852). — Der Hauptsache nach sind seine Gedanken schon im „Schulblatt f. d. Prov. Brandenburg" 1840, Januarheft veröffentlicht.

2) A. W. Grube, geb. 1816 zu Wernigerode, besuchte von 1833 das Weifsenfelser Seminar, wirkte seit 1840 als Hauslehrer und widmete sich später ganz der Schriftstellerei. Er starb 1884. Seine Schriften siehe in Mann, Deutsche Blätter f. erz. Unterricht 1884 S. 59.

3) Grube, Leitfaden S. 28.

Theilung stärkt aber nicht sondern schwächt die Kraft der Anschauung, weil sie deren Konzentration auf einen Punkt und somit das Beobachten im Anschauen hindert. Der Elementarschüler lerne die Zahlen nicht vereinzelt und abgerissen nach den Operationen des Addirens, Subtrahirens, Multiplicirens und Dividirens, sondern jede Zahl (von 1 bis 100) allseitig nach jenen Operationen in ihrer organischen Einheit kennen und behandeln. Da der Zahlenraum, welcher der Anschauung unmittelbar offen liegt und zugänglich ist, das erste Hundert ist und alles Rechnen mit gröfseren Zahlen nur durch Beziehung derselben auf das erste Hundert bewerkstelligt wird, so mufs in diesem Raume jede Zahl nach ihren verschiedenen Bestandteilen klar vor der Seele des Schülers stehen; aus der allseitigen Anschauung der einzelnen Zahlen müssen die Operationen der Species von selbst hervorgehen und selbst die angewandten Aufgaben nur dazu dienen, um die Vorstellung der reinen Zahl desto mehr zu befestigen; dabei müssen endlich die einzelnen Stufen in einem solchen Zusammenhange stehen, dafs die eine sich in der andern wieder und reichlich entfaltet. Nur so wird der Grund gelegt für ein schnelles Kopfrechnen sowohl, wie für ein gründliches Denkrechnen. Der Schüler empfängt das nöthige Material, das er dann später zu jeder Operation gegenwärtig und bereit hat.“

Grubes Methode führt unzweifelhaft zur Konzentration der Aufmerksamkeit auf einen Gegenstand (die Zahl) und zu dessen allseitiger Ausbeutung, wenn das nur der eigentlichste Zweck alles Rechnens wäre.

Was Grube neu geschaffen hat, ist nichts weiter als diē allseitige Behandlung der Zahl auf der Elementarstufe. Weil die Ausführungen dieser Methode allgemein bekannt sind, so dürfen wir auf ihre Darlegung verzichten. — Grubes Idee fand Anklang, A. Böhme[1]) (Berlin) griff sie zuerst auf, zog ihr aber engere Grenzen. Nicht die ersten hundert, sondern nur die ersten zwanzig Zahlen sind nach ihm allseitig zu behandeln, „weil die für die Anschauung des Kindes unmittelbar zugänglichen Zahlen nicht über 20 hinausreichen und weil diese Zahlen auch hinreichen zur Grundlage für alle Species.“ Von den gröfseren Zahlen bedürfen nur

---

1) A. Böhme ist bekannt durch seine zahlreichen den Rechenunterricht betr. Schriften und Aufsätze. Die wichtigsten sind: 1) Anleitung zum Unterricht im Rechnen. 2) Aufgaben zum Rechnen, 5 Hfte, für die abschliefsende Volksschule. 3) Übungsbücher im Rechnen, 5 Hfte, für die weiterführende Volksschule. 4) Dazu 3 Hefte zur Erweiterung. 5) Wandrechentafeln. 6) Aufgaben zum Kopfrechnen, 3 Hefte. 7) Einflufs des metrischen Mafssystems auf den Rechenunterricht im „Schulblatt f. d. Prov. Brandenburg“ 1870 S. 411—414. 8) Das Uhrzifferblatt als Lehrmittel in „Rheinische Blätter“ 1886 S. 58—69. 9) Perioden der Decimalbrüche 1882. 10) Streitige Punkte im Rechenunterrichte 1887.

noch 24, 60, 50, 100, 1000 und 360 einer individuellen Behandlung; 24 und 60 deshalb, weil sie in der Zeitmessung immer ihre Herrschaft behaupten werden; 100 und 1000 deshalb, weil sie als Währungszahlen eine wichtige Rolle spielen, und 360 deshalb, weil sie wegen der grofsen Anzahl ihrer Mafszahlen (2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180) für die Kreisteilung die passendste Zahl ist; auch rechnet man das Zinsjahr zu 360 Tagen. Für die durch Böhme vorgezeichneten Grenzen wurde Grubes Manier von den Schulmännern acceptiert und steht noch gegenwärtig bei vielen in hohem Ansehen, und das, trotz ungünstiger Urteile[1]) über dieselbe und trotz offener Bekenntnisse über Mifserfolge[2]) mit ihr seitens erfahrener Pädagogen. — Wir kommen nun zur Kritik[3]) der Grubeschen Methode.

Der Umstand, dafs nur einige wenige Zahlen allseitig betrachtet werden dürfen und dafs später die alte verachtete Methode, welche den Stoff nach den Species ordnet, wieder Platz greifen müsse, während doch die Objekte der Behandlung hier wie dort gleicher Art, nämlich Zahlen sind, sollte für jeden Didaktiker hinreichend sein, der Grubeschen Methode mit Mifstrauen zu begegnen. Wollte man ihre äufsersten Konsequenzen ziehen, so müfste man alle Zahlen allseitig behandeln, und der Rechenunterricht würde dann einem unendlichen Processe gleichen. Das Verlangen, einen solchen auszuführen, ist aber ein unsinniges Begehren. Wenn nun aber die mit Notwendigkeit aus einem Principe sich ergebenden Folgerungen widersinnig sind, so kann der Fehler nicht in den Folgerungen, er mufs im Principe liegen.

Zu dem fehlerhaften Principe wurde Grube dadurch verleitet, dafs er dem Rechenunterrichte ein falsches Ziel steckte. Es handle sich um Gewinnung „einer vollständigen Vorstellung von der Zahl“, führt er in den Eingangsworten bei der Darlegung seines Princips an. Es ist aber nicht die Vermittelung vollständiger Vorstellungen von den Zahlen à la Grube, sondern vielmehr die Befähigung zum Aufsuchen einer unbekannten Zahl unter gegebenen Bedingungen das einzig wahre Ziel des Rechenunterrichts. Ergiebt sich nebenbei für das Kind noch ein andrer Gewinn

1) Dagott, Die Zahlen von Eins bis Hundert, 1857 3. Aufl.: „Wer blofs die Formen der Grubeschen Anweisung ansieht, der kann sich wohl so entsetzen, dafs es ihm grün und gelb vor den Augen wird.“ Vgl. Kehr, Gesch. der Methodik I, 406, wo eine Menge ausführliche Urteile stehen.

2) „Ich habe kleine Bursche gehabt, die keinen Tag Schule versäumt, also den vollständigen Rechenunterricht und aufserdem noch vielfach Nachhilfe hatten, und die doch am Schlusse des Schuljahres noch nicht wufsten, wieviel 2 und 2 ist“ Wiedemann, Lehrer der Kleinen, 1871 S. 208.

3) Vgl. hierzu: Tanck, Rechnen auf der Unterstufe 1884, S. 37 ff. — Ebenso Knilling, Reform 1884, I, 134 ff.

(Stärkung der Denkkraft etc.), so ist dieser nicht zu verachten; aber die Rechenfertigkeit ist das Hauptziel und immer und nur allein anzustreben. Ein guter Schütze zielt auch nur nach der Zwecke und nicht nach der ganzen Scheibe. Nicht dann kann ein Kind rechnen, wenn es sich über die Zahlen nach Grubes Manier aussprechen kann, sondern wenn es unter den unendlich vielen Zahlen eine unbekannte Zahl bei gewissen Voraussetzungen zu finden weifs. Hat es beispielsweise 97 als richtige Summe einer Additionsaufgabe gefunden, so ist es für die Richtigkeit gleichgiltig, ob das Kind auch noch angeben kann, dafs 97 in „6 × 16 und 1", „4 × 23 und 5", „3 × 31 und 4" etc. zerlegbar ist, dafs es also nach Grube „eine vollständige Vorstellung" der Zahl 97 hat. Da nun die Mittel, unbekannte Zahlen zu finden, keine andern sind als die Species, so kann der Rechenunterricht, auf keiner Stufe ein andres Ziel haben, als den Schülern diese Mittel zu verschaffen und sie in deren Anwendung zu üben.

Zu dem falschen Ziele des Rechenunterrichts gesellte nun Grube sein falsches Princip, welches er aus dem naturwissenschaftlichen Unterrichte herübernahm. Er behauptete, die Zahlen seien genau so wie Naturkörper zu behandeln, und demgemäfs richtete er den Rechenunterricht nach der botanischen Schablone ein. Wie man hier in monographischer Beschreibung von Pflanze zu Pflanze fortschreitet, so heifst er dort von Zahl zu Zahl fortschreiten. Es liegt hier keine Begründung sondern ein Analogieschlufs vor. Ist eine solche Schliefsart schon bei gleichartigen Objekten mit Vorsicht zu gebrauchen, so werden ihre Ergebnisse vollkommen hinfällig bei so grundverschiedenen Objekten, wie sie in der Naturkunde und im Rechenunterrichte [Naturkörper — Zahl] zur Betrachtung kommen. — Die Zahl ist durchaus kein Sinnending; denn von Sinnendingen hat man durch die Ansicht sofort einen Gesamteindruck (Habitus), während man diesen bei der Zahl nicht hat; und was bei Naturkörpern in die Sinne fällt (Gröfse, Gestalt, Farbe etc.), kommt bei den Zahlen garnicht in Betracht.

Grubes Princip steht in enger Beziehung zu dem Pestalozzischen. Jener hat dieses nur weiter entwickelt, die Anschaulichkeit bis auf die Spitze getrieben, die Zahl wie ein Sinnending behandelt und den Zahlunterricht nach Art der Naturbeschreibung eingerichtet.

Der Stufengang der Grubeschen Übungen ist in mehrfacher Hinsicht mangelhaft. Er steht zuerst im Widerspruche mit den psychologischen Gesetzen. Grube schreibt: „Aus der vollständigen Anschauung der Zahlen müssen die Operationen der Species von selbst hervorgehen." Also wird doch auf die Erlernung der Species als Ziel des Rechenunterrichts ein gewisses Gewicht gelegt; es ist das ein zweites Ziel bei Grube. Aber abgesehen davon, dafs derjenige, welcher gleichzeitig zwei Ziele anstrebt, in

r Regel Unglück hat — wie die Fabel von dem Hunde, welcher mit iem Stücke Fleisch durch einen Strom schwamm, überzeugend erzählt, ist doch einzuwenden, dafs Grubes zweites Ziel, die Species, bei seiem ersten Ziele, „vollständige Vorstellung der Zahl“, die Rolle der Vorussetzung spielt. Wenn der Rechenunterricht nach Grubes Methode eginnt, so sind die Species vorhanden; sie sind ja die leitenden Gesichtsunkte, nach denen Zahl um Zahl allseitig betrachtet wird, sie bilden rithmetische Kategorien, die successive mit Inhalt erfüllt werden, sind also durchaus nichts Gewonnenes, sondern etwas Vorausgesetztes. Da nun aber die Species in erster Linie nicht etwas Gegebenes, sondern etwas Abgeleitetes sind, so soll der Schüler Mittel anwenden, die für ihn noch garnicht existieren, und das heifst: gegen die psychologische Entwickelung handeln.

Grubes Übungen sind zweitens auch zweckwidrig. Sollen die Species erlernt werden, wohin ja Grube auch zielt, so mufs jede eine Zeit lang für sich allein betrieben werden; der fortwährende Wechsel zwischen allen vieren stört die Erfassung jeder einzelnen. Wer glaubt, aus den Grubeschen Zerlegungsübungen der Zahlen flösse die Kenntnis und Fertigkeit der Species, der irrt. Beispielsweise beruht die Fertigkeit im Addieren auf dem raschen Vorwärtsschreiten in der natürlichen Zahlenreihe und zwar in beliebig grofsen Schritten; je gröfser die Schritte, desto schneller ans Ziel. Im Rechenunterrichte sind demnach alle möglichen Schritte (Einerschritte, Zehnerschritte, Hunderterschritte, gemischte Schritte etc.) der Schwierigkeit nach zu ordnen und einzuüben, womit die Addition erlernt ist. Wenn aber das Kind nach Grubes Manier gelernt hat: „14 kann ich zerlegen in 6 und 8, desgleichen 15 in 7 und 8, desgleichen 17 in 9 und 8“, und nun die Additionsresultate $6 + 8 = 14$, $7 + 8 = 15$, $9 + 8 = 17$ besitzt, so hat es dadurch durchaus noch nicht den Achterschritt gelernt, und wenn es vergessen haben sollte, dafs man 13 in 8 und 5 zerlegen kann, so stockt es, sobald die Aufgabe $5 + 8$ gestellt wird. Wer aber den Achterschritt in gewöhnlicher Weise (durch Vorwärtszählen) gelernt hat, kann ihn dann an jeder Stelle der Zahlenreihe ausführen, sobald er nur über die Reihe selbst verfügt; es ist nur eine Wiederholung der erlangten Kunst nötig. Fürs Subtrahieren bildet das Rückwärtsschreiten in der natürlichen Zahlenreihe die Grundlage und ist daher ebenso zu üben wie hinsichtlich des Addierens das Vorwärtsschreiten. Ein Auf- und Ablaufen der natürliche Zahlenreihe wird nach Grubescher Methode garnicht geübt. Sie kann demnach den Zweck des Rechnens, Fertigkeit in den Species, garnicht oder nur auf Umwegen erreichen; ire Übungen sind deshalb zweckwidrig. Die Erlangung von Rechenresultaten besteht nach der Grubeschen Methode auch nicht etwa in der Aus-

übung eines Könnens, sondern ist die Reproduktion von Wahrheiten, die man früher empirisch fand und behufs späteren Gebrauchs memorierte. Somit läuft der ganze Rechenunterricht nach genannter Methode in der Hauptsache auf Gedächtniswerk hinaus.

Grubes Stufengang ist drittens langweilig und wirkt abstumpfend. Das Fortschreiten von Zahl zu Zahl ist nicht geeignet, das jeweilig auftretende Objekt mit demjenigen Reize der Neuheit auszustatten, der nötig ist, das Interesse der Schüler lebendig zu erhalten und zu stärken. Nachdem einige Zahlen allseitig behandelt sind, merken die Kleinen bald, dafs mit den folgenden die gleiche Procedur wie mit den vorhergehenden vorgenommen wird. Ein ewiges Einerlei ist aber langweilig; doch der Bien mufs. Da nun die Schüler nicht wissen, wann das Fortschreiten von Zahl zu Zahl einmal aufhören wird, sie aber doch ahnen, dafs es bis in die Unendlichkeit fortgesetzt werden kann — zumal da die meisten schon weiter zählen können als es in der Schule erlaubt wird —, so eröffnet sich ihnen eine Perspektive endloser Arbeit ohne die nötigen Ruhepunkte zum Überschauen des zurückgelegten Weges. Das Bewufstsein aber, am Anfange eines unendlichen Processes zu stehen, lähmt die Kraft und stumpft ab.

Übrigens ist der Rechenunterricht nach Grubes Manier eine saure Arbeit[1]), welche der Mühe nur wenig lohnt. Schüler und Lehrer empfinden es, dafs zur Erreichung des Ziels die Zweckwidrigkeit der Übungen einen gröfseren Kraftverbrauch erfordert als beim direkten Lossteuern auf das Ziel.

Wir glauben, dafs die Tage der Grubeschen Methode gezählt sind, und sind der Meinung, der Schöpfer würde, wenn er der praktischen Ausübung der Lehrthätigkeit treu geblieben wäre, seine Methode selbst

1) „Mir scheint in dem für die ersten beiden Schuljahre bestimmten Stoffe, Zahlraum 1 bis 100, derjenige Gang leichter, der nach Operationen gliedert (Bräutigam, Göpfert, Schneyer) gegenüber der allseitigen Betrachtung jeder einzelnen Zahl“; Schulrat Leidenfrost in: Mann, Deutsche Blätter 1883 S. 381. — „Sie (Grubes Methode) ist vielleicht ein Instrument, mit dem nur Meister umgehen können“; Päd. Jahresbericht IX, 124. — „Sei selbst beweglich. Scheue das Wort nicht! Habe recht viel Geduld; denke nicht, weil Du es sofort weifst, wieviel 3 $\times$ 3 ist, müfste es das Kind auch gleich wissen. Nimm Dich der Pappenheimer unermüdlich an. Bleibt Dir dann doch Einer, oder bleiben gar Einige sitzen, so kannst Du Dir zum Troste sagen, dafs Du Deine Pflicht an ihnen gethan hast! Ich habe überhaupt die Erfahrung gemacht, dafs in keiner andern Disciplin unter den Kleinen so viele Pappenheimer zum Vorschein kommen, als gerade im Rechnen. Oft sonst recht leidliche Köpfe bleiben zuweilen in diesem Fache auf den Hefen sitzen.“ Wiedemann, Lehrer der Kleinen 1871 S. 208. — „Es giebt nichts Mühevolleres, Aufreibenderes und Undankbareres als den ersten Rechenunterricht nach Grubes Manier“; Knilling, Reform I, 106.

begraben und die wenig erfreuliche Totengräberarbeit nicht andern überlassen haben. — Der nächste Paragraph wird uns zu einer zweckmäſsigeren Methode führen.

**§ 97. Das Zählprincip.** „Die Grundlage alles Rechnens ist das Zählen" wurde gleichzeitig von Tanck[1]) und Knilling[2]), zwei Gegnern der Grubeschen Methode, als Princip aufgestellt, nachdem Teupser[3]) schon vorher gegen das Grubesche Princip polemisiert und einen auf das Zählprincip gegründeten Stufengang der elementaren Rechenübungen angegeben hatte, ohne das Princip selbst auszusprechen. Eine neue Wahrheit enthält es keineswegs, denn bis zu Pestalozzi hat man es stillschweigend befolgt. Erst Pestalozzi und Grube drängten es in den Hintergrund. Ausgesprochen hat es allerdings niemand, dazu lag die Notwendigkeit nicht vor, weil die Gegner fehlten. Wie klar es aber dem praktischen Busse vorschwebte, erkennt man aus dem Umstande, daſs er die Fertigkeit des Addierens und Subtrahierens auf die Geschwindigkeit im Hersagen arithmetischer Reihen gründete (siehe § 89). Er übte alle Reihen mit den Differenzen der ersten neun Zahlen tüchtig ein, vorwärts und rückwärts. Auch begnügte er sich nicht nur mit den wichtigsten Reihen, den Einmaleinsreihen, sondern führte für jeden Einer alle Reihen vor, also für jeden Einer so viele Reihen, als er Einheiten besitzt; für 4 beispielsweise die vier Reihen: 1, 5, 9 ... 2, 6, 10 ... 3, 7, 11 ... 4, 8, 12 ... Man übersieht augenblicklich, daſs mit der Ausdehnung dieser Übungen bis zur Grenze 100 eine sichere Grundlage fürs Addieren, Subtrahieren und Multiplicieren gewonnen wird. Genannte Übungen sind zunächst naturgemäſs in Beziehung auf das Objekt, indem dadurch das Addieren aufs Zuzählen, das Subtrahieren aufs Rückwärtszählen gegründet und die Multiplikation als kompendiöse Addition aufgefaſst wird. Sie sind nicht minder naturgemäſs in Beziehung auf das Subjekt, indem der Grundsatz der Stufenmäſsigkeit in aller Strenge durchgeführt werden kann; zuerst lernt das Kind den Einerschritt, dann die Zweierschritte etc., zuletzt den Neunerschritt. Sie sind daneben auch praktisch, indem jeder Schritt eine Zeit lang allein und so lange allein geübt wird, bis ihn der Schüler mit Sicherheit thun kann, während nach Grubes Manier bei jeder Zahl alle möglichen Schritte neben einander gelehrt d. h. durch einander gemengt werden; wo bleibt da der Fortschritt vom Leichteren zum Schwereren! Überdies ist schon im Anfange die Stellung ganzer Reihen von Aufgaben zu stiller resp. häuslicher Beschäftigung sehr leicht möglich, sobald nur die Schüler die

1) Tanck, Rechnen auf der Unterstufe 1884.
2) Knilling, Zur Reform des Rechenunterrichts 1884 I.
3) In: Mann, Deutsche Blätter f. erz. Unterricht 1883 S. 45.

Zahlen lesen und schreiben können. Zu diesem Zwecke ist nur nötig eine Menge Zahlen niederschreiben zu lassen und zu befehlen, von ihnen als Ausgangspunkte den Zweierschritt siebenmal oder zwölfmal oder fünfzehnmal etc. zu thun. Später werden durch Wiederholung der bereits geübten Schritte die Übungen mannigfaltiger.

Zur Aufstellung ihres Princips kamen Tanck und Knilling durch eine Untersuchung über die Entstehung der Zahlbegriffe [1]), wobei sich ergab dafs der Zahlbegriff nicht durch Anschauung, sondern allein durch den Zählakt gewonnen wird. Durch die blofse Anschauung wird weder eine Zahl erkannt noch ein Rechenresultat gefunden. Dafs ein Häuflein Markstücke zwölf Stück sind, kann durch Sinnenauffassung nicht erfahren werden, sondern nur durch Zählen. Was wir von den Zahlen wissen, wird durch Zählen erschlossen; damit ein andrer glaube, er empfange 12, 15 etc. Stück, so werden sie ihm vorgezählt, einen andern Beweis giebt's nicht. Da nun das blofse Anschauen der Mengen nichts nützt, so ist es auch verfehlt, die blofse Anschauung zum obersten Principe des Rechnens zu erheben. Das Abzählen von kleineren Gruppen (bis zu fünf Einheiten) vollzieht sich bei Geübten so rasch, dafs es als solches nicht mehr zum Bewufstsein kommt und wie ein momentanes Erkennen („übersehen“) erscheint. Diesen Umstand benutzt man in Verbindung mit dem Einmaleins den Zählakt abzukürzen; damit nämlich ein andrer den Zählakt schnell wiederholen könne, ordnet man die zu zählenden Einheiten in Gruppen zu je 3 oder 4 oder 5, und zwar in geradlinigen. Durch kreisförmige Gruppierung wird das Abzählen verlangsamt.

::: :::. ::::

Das Zählen selbst ist keine einfache, sondern schon eine komplicierte Thätigkeit. Es erfordert erstens das Innehaben und schnelle Verfügen über eine **feste Reihe**, die natürliche Zahlenreihe; zweitens eine solche Beherrschung unsrer Muskulatur, dafs die Bewegung derselben das Hersagen der Zahlwörter sicher und leicht begleitet, und drittens eine Einsicht in den Zusammenhang des Hersagens der Zahlwörter und des durch Muskelbewegung beschafften Fortschreitens an den Dingen oder Vorgängen [2]) (Fortschieben von Münzen, Betasten von unbeweglichen Körpern, Nicken bei Uhrschlägen etc.).

Unsere Zahlvorstellungen und Zahlbegriffe tragen alle mit nur wenigen

1) Tanck, Rechnen auf d. Unterstufe S. 6 ff. — Desgl. Knilling, Reform I, 23 ff.
2) Tanck, Rechnen auf d. Unterstufe S. 24.

Ausnahmen (etwa bis zu 6) den Charakter des Ungefähren: des Einigen, Mehreren, Vielen, Unendlichen. Bestimmtheit, Deutlichkeit und Klarheit fehlen ihnen. Will man sich irgend eine Zahl z. B. 17 recht lebhaft einbilden, etwa in der Form von Strichen, Punkten etc. und man richtet die Aufmerksamkeit auf den einen von ihnen, so entringen sich unterdessen die andern dem Bewufstsein. Wir halten 16 für einige, 163 für viele, 15 635 für sehr viele, und 5 Milliarden für unendlich viel.

Jede Zahlvorstellung ist einfach; 1536 Personen stellen wir uns nicht als einmal 1000, fünfmal 100, dreimal 10 und sechs einzelne vor; die Dekadik haftet nur dem Worte an, nicht der Zahl; 1536 sehen wir für viele an.

Die Zahlvorstellung wird auch nichts deutlicher durch bestimmte Gruppierung der Einheiten in geometrischer (rechtecksartiger) Ordnung.

Unbenannte Zahlen sind nur unvollständig gelassene Zahlbezeichnungen, die der Ergänzung bedürfen. Wir rechnen mit ihnen deshalb, um uns des unnötigen Ballastes (der Sachnamen) zu entledigen und die Übertragbarkeit der Ergebnisse (z. B. in Tabellen) auf viele Fälle herbeizuführen.

Bestimmte, deutliche und klare Vorstellungen und Begriffe von den Zahlen besitzen wir also nicht. Der Rechner bedarf ihrer aber auch nicht, er kommt auch ohne sie zum Ziele. Wenn er nur weifs, dafs sein Ergebnis die Summe, oder die Differenz, oder das Produkt, oder der Quotient gewisser gegebener Zahlen ist, so hat er seine Aufgabe gelöst, um die übrigen Eigenschaften der gefundenen Zahl braucht er sich nicht zu kümmern. Es kommt beim Rechnen nicht auf die Beschaffenheit der Zahl an, sondern auf die Wege, sie zu finden. Welche Arbeit würde dem Gehirn des Rechnungsbeamten zugemutet, wenn er beim Addieren vieler Kolonnen jede 2, 3, 5 etc., welche er rasch zur Summe zusammenzieht, bestimmt und klar, anschaulich und greifbar denken sollte! Vielmehr drängt der Rechner jeden Gedanken und jeden Begriff zurück, der ihn in der Ausübung der Zahlengesetze hindert.

Mit vorstehenden Erörterungen ist die Theorie über das Zählprincip beendet, es folgt nun dessen praktische Durchführung. Tanck stellt folgenden Stufengang der Übungen[1]) auf:

Erstes Schuljahr; Zahlraum 1 bis 10; a) Einüben der Zahlwörter, b) Zählen an Dingen (Fingern, Strichen, Kugelmaschine) bis 100, c) Zifferschreiben, d) Addieren und Subtrahieren neben einander ohne Überschreitung der 10 (z. B. 5 + 3, 8 — 3), e) Multiplikation als besondrer Fall der Addition, f) Division, g) Wiederholung nach Grubes Manier. Zweites Schuljahr; Zahlraum 1 bis 100; a) Einüben aller Summen und Differenzen

1) Tanck, Rechnen auf d. Unterstufe S. 41 ff. und 79 ff.

bis 20, b) Addieren und Subtrahieren reiner Zehner und Einer (z. B. 40 + 8, 48 — 8), c) desgl. gemischter Zahlen und Einer, doch so, daſs die Summe der Einer unter 10 bleibt (z. B. 43 + 6, 49 — 6), d) desgl. gemischter Zahlen und reiner Zehner (z. B. 43 + 20, 63 — 20), e) desgl. zweier gemischter Zahlen (z. B. 43 + 22; 43 + 28), g) Wiederholung aller Additions- und Subtraktionsfälle, h) Faktor 2, Divisor 2, i) Faktor 5, Divisor 5, k) Quadratzahlen, l) Faktoren, welche um zwei Einheiten differieren (5 · 7), m) die übrigen Faktoren, n) Wiederholung.

Knillings Lehrplan[1]) ist folgender: Erstes Schuljahr; Zahlraum 1 bis 100; a) Zählen und Zifferschreiben, b) die leichteren Übungen im Zuzählen der 1, 2 ... bis 9, c) die leichteren Übungen im Abziehen der neun Einer. Zweites Schuljahr; Zahlraum 1 bis 100; a) Ergänzen des Zehners, b) Zerlegen des Addenden zum Zwecke des Überzählens, c) Addieren mit Überschreitung des Zehners, d) Subtrahieren vom vollen Zehner, e) Subtrahieren mit Überschreitung des Zehners, f) das mehrmalige Zuzählen (Multiplicieren) der 2, 3 ... bis 10, g) das mehrmalige Abziehen (Messen) der 2, 3 ... bis 10, h) Teilen, i) Wiederholung.

§ 98. **Das Princip der konzentrischen Erweiterung.** Das Princip der konzentrischen Erweiterung bezieht sich nicht wie die drei vorigen auf die elementaren Rechenübungen, sondern auf den Stoff für die Übungen im angewandten Rechnen. Ruhsam[2]) hat es in seinen Rechenbüchern durchgeführt. Er teilte den ganzen Lern- und Übungsstoff für die drei oberen Bürgerschulklassen in drei Jahreskurse dergestalt, daſs für jede Klasse die Aufgaben von gleicher Art, jedoch von wachsender Schwierigkeit sind. Es wird demnach in jeder Klasse der gesamte Unterrichtsstoff (Procent-, Zins-, Diskont-, Gesellschafts-, Mischungsrechnung etc.) in seinem ganzen Umfange gelehrt und zwar so, daſs die dem Standpunkte der Schüler entsprechenden Partien aus jedem Gebiete ausgewählt und zu einem Ganzen vereinigt sind.

Anklang und Nachahmung fand dieser Versuch nicht. Schulrat Leidenfrost urteilte gelegentlich[3]) sehr abfällig über die Anwendung des Princips der konzentrischen Erweiterung in den mathematischen Fächern. — In der Anordnung der angewandten Rechnungsarten ist bis jetzt die einfache Aufeinanderfolge derselben herrschend geblieben. Sobald Bruchlehre und Bruchsatz erledigt sind, bieten jene Aufgaben keine neuen rechnerischen Schwierigkeiten mehr, das Neue liegt nur in den Sachverhältnissen; und

1) Knilling, Reform II, 124 ff.

2) Ruhsam, Aufgaben für das prakt. Rechnen z. Gebrauch in den untern drei Klassen der Realschulen und in den obern Klassen von Bürgerschulen in drei concentrisch sich erweiternden Cursen 1866.

3) In: Mann, Deutsche Blätter für erz. Unterricht 1883 S. 381.

zu deren Beherrschung und richtigen Beurteilung dürfte der Schüler eher durch zusammenhängende als durch stückweise Vorführung gelangen.

§ 99. **Einfluſs des decimalen Münz-, Maſs- und Gewichtsystems auf die Schularithmetik.** Jahrhunderte lang sind die Stimmen der Rechenmeister unbeachtet geblieben, welche auf den hohen praktischen Wert eines decimal abgestuften Münz-, Maſs- und Gewichtsystems überhaupt und auf die groſse Erleichterung, welche durch Einführung eines solchen in allen kaufmännischen Rechnungen herbeigeführt werden würde, insbesondere hingewiesen haben. Schon der Erfinder der Decimalbrüche, Simon Stevin, pries die Einführung decimaler Währungszahlen an, und nach ihm wurde zu allen Zeiten die Anpreisung wiederholt.[1]) Frankreich ging voran und führte nach der Revolution 1789 das Decimalsystem in Münzen, Maſs und Gewicht ein; zur Feststellung der Längeneinheit, des Meters (1 m = der zehnmillionenste Teil eines Erdquadranten), wurde in Frankreich eine neue Gradmessung[2]) angeordnet. Die Vereinigung der deutschen Stämme zum Norddeutschen Bunde 1866 räumte auch bei uns mit dem bunten Vielerlei der neben einander bestehenden Münz-, Maſs- und Gewichtsysteme auf. Am 17. August 1868 wurde die neue Maſs- und Gewichtordnung für den Norddeutschen Bund festgestellt und trat am 1. Januar 1872 in Kraft. Zugelassen war ihr Gebrauch schon vom 1. Januar 1869 ab, sobald sich die beteiligten Parteien darüber geeinigt hatten. Die Grundlage für Maſs und Gewicht bildet das Meter mit decimaler Teilung und Vervielfachung. Als Urmaſs gilt derjenige Platinstab, welcher im Besitze der Preuſsischen Regierung sich befindet; er wurde 1863 durch eine Kommission mit dem im Kaiserlichen Archive zu Paris aufbewahrten Mètre des Archives verglichen und bei 0° C. gleich 1,00000301 m befunden.[3]) Als Urgewicht gilt das im Besitze der Preuſsischen Regierung befindliche Platinkilogramm, welches 1860 mit dem im Kaiserlichen Archive zu Paris aufbewahrten Kilogramme prototype verglichen und gleich 0,999999842 kg befunden wurde.[4]) 1 kg ist das Gewicht eines Kubikdecimeters destillierten Wassers bei 4° C. Der deutsche Bundesrat setzte am 8. Oktober 1877 für den amtlichen Verkehr und den Schulgebrauch in Deutschland folgende Abkürzungen ohne Hinzufügung von Punkten fest: t kg g mg; km m cm mm; ha a qm qcm qmm; cbm hl l ccm cmm; M.

---

1) Vgl. § 62.

2) Ausführliches darüber: Harms, Das neue Maſs- und Gewichtssystem, Progr. der höheren Bürgerschule Oldenburg 1869.

3) Artikel 2 der „Maſs- und Gewichtsordnung für den Nordd. Bund, vom 17. Aug. 1868“.

4) Ebenda Artikel 5.

Die Einführung des Decimalsystems im Münz-, Maſs- und Gewichtwesen hat auch den der Schule zugewiesenen Lehrstoff im Rechnen umgestaltet; es war fortan Neues aufzunehmen und Hergebrachtes aufzugeben resp. zu beschränken. Von nun an erlangten die Decimalbrüche das Bürgerrecht in der deutschen Volksschule; bisher war für sie nur Raum in den Tabellen gewesen, für kaufmännische Rechnungen aber waren sie ein entbehrliches Kunstmittel geblieben, weil man eine reale Bedeutung den Bruchteilen nicht unterlegen konnte, wie es gegenwärtig der Fall ist.[1])

Die Preuſsische Regierung zu Frankfurt a. O. nahm rechtzeitig Veranlassung, durch eine Cirkularverfügung[2]) darauf hinzuweisen, in welche Bahnen der Rechenunterricht einzulenken habe, damit den gesetzlichen Bestimmungen bezüglich der Einführung der neuen Maſs- und Gewichtordnung auch durch die Schule Genüge geschehe. Sie verwies dabei auf: Menzel, Leitfaden für den Rechenunterricht in der Volksschule nach der neuen Maſs- und Gewichtsordnung vom 17. August 1868. Viele arithmetische Schriften jener Zeit tragen den Titelzusatz[3]) „nach der neuen Maſs- und Gewichtsordnung". Auch erschienen eine Menge Spezialschriften[4]) über die Decimalbrüche. Wertvolle Beiträge zu den Eigenschaften der periodischen Decimalbrüche lieferten Theodor Schröder[5]) und A. Böhme[6]). Das Verfahren der abgekürzten Multiplikation und Division lehrte man schon in den ersten Schriften[7]) über Decimalbruchrechnen. Die praktischen Regeln[8]) zum Rechnen mit unvollständigen Decimalbrüchen findet man in allen guten Lehrbüchern der Arithmetik.

In den pädagogischen Zeitschriften erschien ums Jahr 1870 eine Flut von Artikeln[9]), in denen über die Veränderungen, welche im Rechenunter-

---

1) Vgl. § 62.

2) Abgedruckt im „Schulblatt f. d. Provinz Brandenburg" 1868 S. 648.

3) Langenberg, Der Rechenmeister nach dem 1872 giltigen Maſs- und Gewichtssystem 1869. — Menzel, Das Bruchrechnen in seiner durch die Maſs- und Gewichtsordnung bedingten Umgestaltung 1870. — Frenzel, Die Neugestaltung des Rechenunterr. nach dem neuen Münzgesetze 1872 etc.

4) Menzel, Das Decimalrechnen 1869. — Wirth, Die Decimalbrüche 1870 (5. Aufl.). — Schröder, Das metrische Maſs und Gewicht und die Decimalbruchrechnung 1870. etc.

5) Schröder, „Über die Qualität der Decimalbrüche" im Progr. der K. Studienanstalt Ansbach 1870/71.

6) Böhme, Perioden der Decimalbrüche 1882.

7) Hentschel, Aufg. über d. Decimalbrüche 1865 S. 47—52. — Menzel, Decimalrechnen 1869 S. 48—60. — Pammer, Decimalrechnen 1872 S. 21—26 und 35 ff.

8) Auch in Hoffmanns Zeitschrift für math. Unterr. V, 177—217.

9) Schulblatt f. d. Prov. Brandenburg 1870 S. 125—127. — Ebenda 1870 S. 411—414. — Ebenda 1872 S. 45—51.

richte durch die neue Mafs- und Gewichtordnung notwendig geworden seien, mehr oder minder gut gesprochen wird. Die Veränderungen gipfeln darin, dafs das Rechnen mit den dekadischen Einheiten (als Währungszahlen) und mit den decimalen Brüchen in den Vordergrund zu stellen sei und das Rechnen mit gemeinen Brüchen zurückzutreten habe.

Die Stellung der Decimalbrüche im Lehrgange wurde zur Streitfrage, welche noch der Erledigung harrt. Es stehen drei Ansichten einander gegenüber: a) die Voranstellung[1]) der gemeinen Brüche vor die decimalen; b) die in einander geschobene Behandlung[2]) beider (d. h. dafs in jeder Species dem Rechnen mit gemeinen Brüchen die Decimalbrüche folgen, was von der ersten Ansicht unwesentlich abweicht); c) die Voranstellung[3]) der decimalen Brüche vor die gemeinen.

Dafs genügende Erledigung des Rechnens mit gemeinen Brüchen zu den schwierigen Kapiteln des Rechenunterrichts gehört, ist bekannt; ebenso ist bekannt, dafs mancher Schüler nur in die Brüche gerät, aber nicht wieder herauskommt. Diese Umstände mögen wohl bei Vertretung der Ansicht c) mitwirken. Bei solcher Anordnung wird aber die begriffliche Schwierigkeit des Bruchs nicht erledigt, sondern umgangen, indem man sich mit Analogien durch Aufstellung von Reihen behilft[4]) ($468 \times 4$; $468 \times 0{,}4$; $468 \times 0{,}04$; $468 \times 0{,}004$ etc.). Dieser Mangel hat andere zu einer Trennung der zur Decimalbruchlehre gehörenden Partien veranlafst dergestalt, dafs die Addition und Subtraktion ganz, von der Multiplikation und Division aber nur diejenigen Fälle, bei denen der Multiplikator resp. Divisor ungebrochen ist, im Anschlusse an das Rechnen mit mehrsortigen Zahlen behandelt werden, während die übrigen Teile erst später ihre Erledigung finden.[5]) Untersucht man, was bei dieser Behandlungsart von der Vorstellung der Brüche und Rechnung mit denselben noch übrigbleibt, so ist es wenig bis nichts. Das Rechnen ist thatsächlich nur ein Operieren mit ganzen Zahlen und auch die Vorstellung erstreckt sich nicht weiter; das Decimalkomma ist nur ein Trennungszeichen der zwei Sorten.[6]) Somit enthüllt sich die decimalbruchartige Schreibweise

1) Löwe und Unger, Aufg. zum Zahlenrechnen, Leipzig 1884 u. 1887 Heft B. Auch in Württemberg.

2) A. Böhme, Streitige Punkte im Rechenunterrichte 1887 S. 6.

3) Leidenfrost, „Die Stellung und Behandlung der Lehre von den Decimalbrüchen im Rechenunterrichte" in: Mann, Deutsche Blätter f. erz. Unterr. 1883 und 1884 (sehr ausführlich, mit Streiflichtern auf allerhand Mängel des Rechenunterrichts).

4) Harms, Rechenbuch für die Vorschule, Oldenburg 1875 2. Aufl. Heft 2.

5) Leidenfrost a. a. O. 1883 S. 382 ff.

6) Eine Angabe von mehr als zwei Sorten entspricht konkreten Verhältnissen nicht; z. B. am Barometer liest man cm und mm ab, Wegstrecken giebt

mehrsortiger Zahlen als einziger Kern der ganzen Sache; ein Rechnen mit Decimalbrüchen ist nicht dabei.

Wenn man einmal die begriffliche Schwierigkeit der gebrochenen Zahl nicht zu erledigen die Absicht hat, so halten wir es für geratener, die Schüler nicht erst von Zehnteln, Hunderteln etc. schwatzen zu lassen, damit sich nicht Worte einstellen, wo Begriffe fehlen. Wir haben gezeigt[1]), wie man alle Species des Rechnens mit benannten Zahlen in decimalbruchartiger Schreibweise betreiben kann, ohne von Bruchteilen zu reden.

Der Vorteil, der aus der Voranstellung der gemeinen Brüche vor die decimalen flieſst, ist so in die Augen springend, daſs er auch von den Vertretern der andern Ansichten anerkannt[2]) wird. Es lassen sich bei solcher Aufeinanderfolge die wenigen Regeln der Rechnung mit Decimalbrüchen mit gröſster Leichtigkeit zu vollem Verständnis bringen. Neue Regeln treten überhaupt nicht hinzu, da ja die Decimalbrüche nur eine Abteilung (eine sehr kleine) der gesamten Brüche sind; den schon bekannten Regeln ist nur wegen der abweichenden schriftlichen Form der Decimalbrüche ein diesbezüglicher Wortlaut zu geben.

Einzelne wollen den gemeinen Brüchen gar keine Stätte mehr in Volks- und höheren Mädchenschulen gewähren. Wendt schreibt[3]): „Ich halte das Bruchrechnen für einen zur Ausrottung völlig reifen Wasserschöſsling am Unterrichtsbaume der Volks- und Mädchenschule . . . und die höhere Mädchenschule würde sich ein Verdienst erwerben, wenn sie zuerst damit vorginge, das Bruchrechnen aus dem Lehrplane zu entfernen oder es wenigstens sehr zu beschränken.“ Weiſs Wendt nichts von dem Auftreten der gemeinen Brüche in der Procent- und Zinsrechnung? weiſs er nicht, daſs nicht alle Völker, mit denen wir in Handelsverkehr stehen, decimale Währungszahlen haben? Unsre immer mehr an Ausdehnung gewinnenden Handelsbeziehungen mit andern Nationen erfordern es, daſs gerade in den Schulen, deren Schülercötus sich aus den Kindern höherer Stände zusammensetzt, das Rechnen mit gemeinen Brüchen nach wie vor gründlich betrieben wird. Und unter den Schülerinnen der höheren Mädchenschulen befindet sich manche Kaufmannstochter, die als Tochter dem Vater oder als Gattin dem Gatten im Komptoir helfend zur Seite tritt. Entweder ist das Bruchrechnen für Wendts „höhere Mädchen“ zu hoch, oder sein vermeintliches Verdienst läuft auf eine methodische Verirrung hinaus.

---

man in km und m an, Waren kauft man nach m und cm; ausgenommen ist nur das Flächenmaſs, wobei ha, a und qm neben einander auftreten.

1) Löwe-Unger, Aufg. zum Zahlenrechnen 1884 und 1887 Heft A.

2) Leidenfrost a. a. O. 1883 S. 72.

3) In: Mann, Deutsche Blätter für erz. Unterr. 1884 S. 96.

**§ 100. Anschauungsmittel.** Ein Anschauungsmittel für die Zahl erdient nur dann seinen Namen im vollen Sinne des Worts, wenn damit lle Einheiten der Zahl durch ebensoviele getrennte gleichartige Kör-er oder Zeichen dem Auge sichtbar gemacht werden. Findet eine zusammenfassende Darstellung statt, d. h. wird durch einen Körper oder ein Zeichen eine Menge Einheiten repräsentiert, so ist das Unterrichtsmittel dann kein wirkliches Anschauungsmittel mehr, sondern nur noch ein symbolisches. Wir unterscheiden demnach wirkliche und symbolische Anschauungsmittel und teilen jede Art in körperliche und graphische.

A. Wirkliche Anschauungsmittel. — a) Körperliche. — Bei den hierhergehörigen Apparaten hat man Kugeln (Nr. 1 und 2), Stäbchen (Nr. 3—5), Würfel (Nr. 6—10), Knöpfe (Nr. 11—13) und Marken (Nr. 14) als Objekte für die Einheiten gewählt.

1. Die russische Rechenmaschine. Dieser bekannte aus einem quadratischen Rahmen und 10 horizontalen Drähten mit je 10 beweglichen Kugeln (resp. Linsen) bestehende Apparat ist die einfachste, billigste und zweckmäfsigste Rechenmaschine. Ort und Zeit ihres Ursprungs werden sich schwer feststellen lassen; sie soll in Rufsland erfunden sein und im Anfang dieses Jahrhunderts über Frankreich den Weg nach Deutschland gefunden haben.

Kugeln auf Schnüren (katholischer Rosenkranz) oder Drähten sind schon in früher Zeit bei verschiedenen Völkern (Chinesen, Russen) zum Zählen und Rechnen benutzt[1]) worden.

Dafs der Schüler jederzeit alle 100 Kugeln sieht, auch wenn nur einige gebraucht werden, ist ein Übelstand, der aber dadurch beseitigt werden kann, dafs man die Drähte gehörig lang macht und sie zur Hälfte dem Auge des Zuschauers durch ein Brett verdeckt. Hinter diesem Brette sind sämtliche Kugeln zu verbergen; die jeweils zum Gebrauch herangezogenen schiebt man in den freien Teil des Gesichtsfeldes.

2. Das Zahlenbilder-Rechengestell[2]) von G. Wille ist in der Hauptsache eine russische Maschine mit Verdeckbrett, wie vorhin angedeutet. Von den 10 Kugeln jedes Drahtes sind die ersten 5 weifs, die übrigen schwarz. Nach je zwei Drähten ist ein gröfserer Zwischenraum. Die Veranschaulichung der Zahlen soll durch feste Zahlbilder (d. h. Kugeln in besonderer Gruppierung) geschehen, welche für die geraden Zahlen aus senkrechten Paaren : :: ::: :::: ::::: bestehen. Diejenigen für

1) Siehe oben S. 69. — Mehr darüber in Unger, Gesch. d. elem. Arithm.; rogramm Realschule-Reudnitz 1883 S. 13—16.

2) G. Wille, Zwei neue Veranschaulichungsapparate z. element. Rechnen, elitzsch Pabst 1870.

die ungeraden Zahlen entstehen aus jenen dadurch, dafs an eine der vier Ecken noch eine Eins hinzutritt.

3. Stabbündel. Overberg[1]) und Villaume[2]) benutzten Stäbchen, so dick wie eine Federspule und 1 Fufs lang, zur Darstellung der Einheiten und vereinigten sie zu dekadischen Bündeln. Man gebrauchte die Namen 1 Stöckchen für 1, 1 Bündchen für 10, 1 Bund für 100, 1 Päckchen für 1000, 1 Pack für 10000 Stäbchen.

4. Die Cossmannsche Numeriermaschine[3]) ist ein dickes Brett mit Kolonnen von je 9 Löchern, in welche die Stäbchen (so grofs wie Streichhölzer) gesteckt werden. Die erste Löcherkolonne rechts ist für 9 einzelne Stäbchen, die zweite für die Zehnerpakete, die dritte für die Hunderterpakete etc. bestimmt.

5. Denzels Leiter[4]) ist eine Leiter mit 10 Sprossen (für das Zahlengebiet von 1 bis 10). Ein aus 10 solchen Leitern treppenartig zusammengesetzer Apparat veranschaulicht das Zahlengebiet von 1 bis 100. Zehn Leitern der letzteren Art repräsentieren die Zahl 1000. An den Leitern wird aufsteigend das Vorwärtszählen und absteigend das Rückwärtszählen geübt.

6. Tillichs Rechenkasten. Die Idee, die Einheiten einer Zahl durch ebensoviele Kuben zu veranschaulichen ist Tillichs Eigentum (siehe oben S. 183). H. Bräutigam suchte neuerdings das Interesse für die Tillichschen Hölzer wieder zu beleben.[5]) Nach seiner Beschreibung haben die Prismen weifsen Anstrich, durch ringsumlaufende schwarze Striche sind die einzelnen Kuben, aus denen ein Prisma besteht, zu unterscheiden. Beim Gebrauch der Tillichschen Hölzer benutzen die Schüler eine Schiefertafel mit Quadratnetz und zeichnen die Anzahl der Kuben durch ebensoviele Quadrate.

7. Schneyers Baukasten[6]) enthält (nach Tillichs Vorschrift angefertigt) 20 Kuben für die Einheiten, 10 Zweier (das sind zwei Kuben zu einem Prisma vereinigt), 8 Dreier, 4 Vierer, 4 Fünfer und je 2 Siebener, Achter, Neuner und Zehner.

8. Heers Würfel[7]) besteht aus 10 gleichen Kuben (10 Einheiten

1) Overberg, Anweisung z. zweckmäfs. Schulunterricht, Münster 1793.

2) Villaume, Prakt. Handbuch für Lehrer 1800, 2. Aufl. S. 128 ff.

3) Deutsche Schulzeitung 1874 Nr. 40.

4) Denzel, Einleitung in die Erziehungs- u. Unterrichtslehre, Stuttgart 1822 S. 191.

5) Bräutigam, Tillichs Rechenkasten, Veranschaulichungsmittel für d. element. Rechenunterr.; Jahresbericht d. Seminars zu Bielitz 1872.

6) Schneyer, Der erste Rechenunterr. mit Benutzung des Baukastens und der Netztafel 1871.

7) Heer, Lehrbuch des Denkrechnens 1836.

repräsentierend), 9 Säulen, welche mit dem Einheitkubus gleiche Basis aber die zehnfache Höhe haben (jede die Zahl 10 darstellend), und 9 quadratischen Platten, von denen jede aus 10 aneinandergelegten Säulen zusammengesetzt ist und die Zahl 100 veranschaulicht.

9. Der Krämersche Apparat[1]) ist dem Heerschen Würfel nachgebildet. Er besteht aus a) 5 weifsen und 5 schwarzen Kuben für 10 Einheiten, b) 10 Prismen (für 10 Zehner), deren Gröfse und Anstrich derart ist, als ob 5 weifse und 5 schwarze Kuben in abwechselnder Reihenfolge auf einander gesetzt wären, c) 10 quadratischen Platten (für 10 Hunderter) von der Dicke des Kubus und von der Länge eines Prismas; der Anstrich ist schachbrettartig, die Oberfläche zeigt 100 quadratische Zellen, d) einem grofsen Kubus, der 1000 Einheitkuben enthält und auf jeder Grenzfläche ein schachbrettartiges Zellennetz von 100 Quadraten besitzt.

10. Der Zahlenbilder-Rechenkasten[2]) von G. Wille ist ein Kasten, in dessen Schubfache sich eine Menge gleichgrofser Kuben von verschiedener Farbe (weifs, schwarz, braun, rot etc.) befindet, welche beim Rechnen auf dem Deckel des Kastens zu Zahlenbildern (in gleicher Gestalt wie bei Nr. 2) aufgestellt werden.

Die Veranschaulichung der Einheiten einer Zahl durch ebensoviele getrennte Kuben ist nicht zu bemängeln; die Verbindung der Kuben aber zu Prismen und Platten gereicht dem Anschauungsmittel nicht zum Vorteile, weil dadurch die so nötige Beweglichkeit beeinträchtigt wird. Doch ist dies noch der kleinere Übelstand; der gröfsere liegt (bei den Prismen) in der geradlinigen Anordnung aller Kuben, wodurch das rasche Abzählen derselben erschwert wird. Die ringsumlaufenden Teilungsstriche erleichtern den Zählakt; ohne sie dürfte es selbst Erwachsenen schwer sein, das Neuner- oder Zehnerprisma augenblicklich als solches zu erkennen. Aufserdem lassen sich mit den starren Platten viel weniger Übungen anstellen, als wenn die 100 Kuben einer Platte getrennt vorhanden wären.

11. Die Berliner Knopftafel, welche ihre Entstehung[3]) dem Berliner pädagogischen Vereine verdankt, ist eine schwarze quadratische Tafel mit 10 Reihen von je 10 Löchern in gleichen Abständen. Zum Rechnen bedient man sich weifser Hornknöpfe. — Der Apparat leistet dasselbe wie die russische Maschine, nur ist sein Gebrauch zeitraubender, auch weiten sich die Löcher nach und nach aus.

---

1) Beschrieben in Prausek, Über die verwendbarsten Lehrmittel z. ersten Unterricht im Rechnen, Olmüz 1864 S. 16 ff.

2) Wille, Zwei Veranschaulichungsapparate zum Rechnen, Delitzsch Pabst 1870.

3) Schütze, Evang. Schulkunde 1870 S. 463.

12. Das Loofssche Rechenbrett[1]) (fürs Zahlengebiet 1 bis 10) ist eine Holztafel, doppelt so lang als breit. Man sieht zwei quadratische Felder, ein rotes und schwarzes, auf denen sich zum Einstecken der Knöpfe je 9 Löcher in quadratischer Anordnung befinden.

13. Martens' Rechenapparat[2]) zum Rechnen mit den ersten 10 Zahlen ist eine rechteckige Tafel mit 3 Feldern und je 10 Löchern in nebenstehender Anordnung ⁝⁝⁝ $a$ ⁝⁝⁝ $b$ ⁝⁝⁝ Auf den beiden ersten Feldern kommen die gegebenen Zahlen (in Knöpfen) zur Darstellung, auf dem dritten das Resultat. Bei $b$ steht immer das Gleichheitszeichen, während man bei $a$ eins der vier Operationszeichen (+ — × :) einsetzt.

Die Erfindung der Löcherbretter reicht bis zu Joh. Gersbach (ca. 1840) zurück, welcher sich die Notentafel in gleichen Abständen à 1 Zoll durchbohrt hatte und gedrehte Holzknöpfe zum Rechnen benutzte, worüber Stern[3]) Nachricht giebt.

14. Knillings Rechentisch[4]) ist ein Tisch, dessen Platte man durch parallele Striche in vier Kolumnen zur Aufnahme der Einer, Zehner, Hunderter und Tausender teilt. Gerechnet wird mit den deutschen Reichsmünzen. Die Einheit ist das Pfennigstück, der Zehner ist eine Rolle mit 10 Pfennigstücken (oder 1 Zehnpfennigstück), der Hunderter eine Rolle mit 100 Pf. (oder 10 Zehnpfenniger oder 1 Markstück), 10 Hunderterrollen bilden 1 „Säckchen" für die Zahl 1000. Beim Rechnen werden die Rollen nach Bedarf geöffnet (z. B. in der Subtraktion). — Der Hauslehrer wird sich dieses Mittels nicht ohne Nutzen bedienen; für eine Schulklasse von 40 bis 50 Köpfen ist es ungeeignet, da es wegen der Manipulationen auf einer horizontalen Fläche nicht gleichzeitig für alle sichtbar ist. Auch ist es nicht angängig, jedes Kind mit diesem Hilfsmittel (selbst wenn es Marken wären) auszurüsten, weil die Kleinen zum Öffnen und Packen der Rollen noch kein Geschick besitzen; ganz abgesehen davon, dafs diese Ausstattung für viele zu kostspielig sein und andre zur Verletzung des siebenten Gebots reizen würde.

b) Graphische. — Striche (Nr. 15), Punkte (Nr. 16 u. 17), Quadrate (Nr. 18) und Kreise (Nr. 19 u. 20) sind die Zeichen, welche man zur Veranschaulichung der Einheiten bevorzugt hat.

---

1) Loofs, Rechnen im Zahlenraum von 1—10, Dresden 1869.

2) In: Haus und Schule, päd. Zeitschrift herausg. v. Spieker, Hannover 1877 Nr. 3.

3) Stern, Lehrgang d. Rechenunterrichts 1842 S. XXXII.

4) Knilling, Reform d. Rechenunterrichts 1887 II, 20—24.

15. Die Striche brachte Pestalozzi auf seiner Einheitentabelle[1]) zur Anwendung.

16. Punkte, zu Zahlbildern formiert, benutzte vor ihm schon Busse[2]) und zwar in folgender Anordnung

Die folgenden Zahlen bis 99 sind zusammengesetzt aus dem Zehnbilde und einem Einerbilde. 100 wird dargestellt durch 10 Reihen von je 10 Punkten auf 10 schmalen Brettchen. Zur Zahl 1000 verwendet er das obige Zehnbild hundertmal und zwar in 10 Kolonnen à 10 Stück.

17. Bräunlichs Zahlbildertafel[3]) enthält das Zehnbild hundertmal und zwar in 10 Kolonnen zu 10 Stück, jedes ist mit einem Rechteck umrahmt. Jede Kolonne kann durch einen Schieber ganz oder teilweise verdeckt werden. Man kann mit dieser Tafel alle Zahlen bis 1000 veranschaulichen. Will man beispielsweise 537 zeigen, so öffnet man 5 Kolonnen ganz, von der letzten die untersten 3 Zehner und setzt die 7 daneben (die ersten 9 Zahlbilder sind einzeln vorhanden).

18. Das Grasersche Fenster[4]), welches als Zeichen für die Einheit das Quadrat benutzt, besteht aus 2 oberen und 2 unteren Flügeln, erstere haben je 2, letztere je 3 Scheiben. Ein oberer Flügel repräsentiert die 2, beide die 4, ein unterer die 3, beide die 6, ein oberer und ein unterer die 5 etc.

In der Zeichnung der Tillichschen Hölzer treten die Einheiten ebenfalls als Quadrate auf.

19. Heers Rechenfiguren[5]) sind gedruckte farbige Kreise in schwarzen Quadraten gemäfs der Anzahl der Einheiten, jede der ersten 10 Zahlen darstellend. Stern[6]) stellte den Kreis in den Dienst der Selbstthätigkeit, indem er die Schiefertafel mit einem Quadratnetze versah und die Kreise (= „Ringel") von den Schülern in die Quadrate einzeichnen liefs.

20. In Borns Rechenapparat[7]) sieht man zweimal 5 kreisförmige Öffnungen mit weifsem Hintergrunde. Durch einen Zug kann man sämtliche Öffnungen rot, durch einen zweiten sämtliche schwarz er-

---

1) Siehe oben S. 177.

2) Busse, Gemeinverständliches Rechenbuch 1786 S. 1—6.

3) Bräunlich, Volksthümliches Rechnen 1877, 3. Aufl. S. 87—89.

4) Graser, Elementarschule fürs Leben 1821 S. 273.

5) Heer, Lehrbuch des Denkrechnens, Zürich 1836.

6) Stern, Lehrgang des Denkrechnens 1842 S. XXXII.

7) Born, Neuer Rechenapparat zur Veranschaulichung der Rechenoperationen an Zahlbildern mit wechselnden Farben, Berlin 1867. (Patentiert.)

scheinen lassen. Durch Verdeckung mit einem Schieber gewinnt man die Zahlbilder ○ ○○ ○○○ ○○○○ etc. Die Einrichtung der Maschine läfst es zu, dafs man von den Kreisen eines Zahlbildes einige rot, die übrigen schwarz sichtbar machen kann, wodurch die Zerlegung der Zahl in 2 Summanden veranschaulicht wird. — Ein komplicierter Apparat thut's nicht.

Wiedemann[1]) beschränkte sich nicht nur auf ein einziges Element, sondern wählte die mannigfaltigsten (leicht herstellbaren) Zeichen wie: Striche, Punkte, Kreuze, Kreise, Räder, Vierecke, Briefe, Fenster, Stühle, Äpfel, Blätter, Häuser, Bäume, Gläser etc.

Häufig stellt man die Zahlen durch sogenannte Zahlbilder dar, das sind konstante Gruppierungen der Elemente (Punkte, Striche, Kreise, Knöpfe, Kugeln etc.). Diese Bilder sind eine Erfindung des Philanthropen Busse: „Ich[2]) rathe, die Einbildungskraft der Schüler an jene ein für allemahl gewählte Stellungen zu gewöhnen. Deshalb könnte man diese Bilder[3]) etwas gröfser gezeichnet an die Wand des Lehrzimmers aufhängen.“ Zum eisernen Bestande der Methodik gehören sie seit Zeller[4]) 1840, welcher jedoch für 5, 7 und 9 andere Gruppierungen ⁙ ⁙ ⁙ wählte. Am beliebtesten sind die Berliner Zahlbilder, die mit den Busseschen bis auf die Bilder ⁙ ⁙ ⁙ für 5, 7 und 10 übereinstimmen. Willes Zahlenbildergestell und Borns Apparat liefern naturgemäfs nur zweireihige Zahlbilder. — Eine glückliche Erfindung sind die Zahlbilder nicht, und wer das Hauptgewicht auf das „Bild“ legt, thut einen Mifsgriff. Es sind beispielsweise 8 Punkte nicht nur in der vorgeschriebenen Gruppierung 8 Punkte, sondern sie bleiben es in jeder andern Anordnung; und jede beliebige Gruppierung der Punkte, Striche, Kreise etc. ist nicht nur zulässig, sondern sogar nötig, damit nicht die Vorstellung platzgreife, als gehöre die eigenartige Gruppierung der Einheiten zum Inhalte des Zahlbegriffes.

B. Symbolische Anschauungsmittel. — a) Körperliche.

21. Der Jarichsche Rechenapparat[5]) ist ein starker Querstab mit zehn senkrecht neben einander stehenden Drähten, auf jedem ist Raum für 9 Kugeln. Man legt den Drähten in derselben Richtung wie im Positionssystem die dekadischen Stellenwerte bei. Es gilt auf dem ersten Drahte rechts jede Kugel 1, auf dem nächsten 10, auf dem dritten 100 etc.

---

1) Wiedemann, Des Kindes erstes Rechenbuch, Dresden.

2) Busse, Anleitung z. Gebrauche eines gemeinverständlichen Rechenbuchs 1786 S. 1.

3) Siehe dieselben oben S. 207.

4) Zeller, Kleine Zahllehre in Zahlbildern, Stuttgart 1840.

5) Beschrieben in: Prausek, Lehrmittel zum ersten Unterricht im Rechnen, Olmüz 1864 S. 11 ff.

22. Der Živnýsche Apparat[1]) ist eine Rechenmaschine, welche eine doppelte Aufstellung zuläfst. Man kann sie so aufstellen, dafs die zehn Drähte (mit je 10 Kugeln versehen) wagerecht verlaufen und hat in dieser Aufstellung die russische Kugelmaschine. Man kann aber die Drähte auch in senkrechte Lage bringen, den oberen Teil des Rahmen fortnehmen und so die Drähte mit dem einen Ende zum Abnehmen und Aufstecken der Kugeln frei machen. Man legt den Drähten in senkrechter Stellung Stellenwert bei und giebt sich bei diesem Apparate ebenso wie bei dem vorigen der Täuschung hin, zehnstellige Zahlen veranschaulicht zu haben.

23. Die Wunstorfer Rechenmaschine[2]) soll zur Veranschaulichung des Positionssystems und der Decimalbrüche bis zu den Zehntausendteln dienen. Die Drähte (mit Stellenwert) verlaufen senkrecht und sind zu je drei gruppiert, um auch noch dem Aussprechen der Zahlen gerecht zu werden. Die Kugeln tragen ein unserem Münzsystem entsprechendes Kolorit; die Einerkugeln sind kupferrot, die Zehner nickelfarbig, die Hunderter silberweifs, die Tausender goldgelb, die Zehntausender blau (Hundertmarkschein), die Hunderttausender seegrün (Tausendmarkschein). Rechts von den Drähten für die ganzen Zahlen folgen die Drähte für die Decimalbrüche; letztere haben ebenfalls Stellenwert $10^{-1}$, $10^{-2}$, $10^{-3}$ etc., tragen aber kleinere Kugeln als erstere.

24. Durch die Rösenersche Rechenmaschine[3]) sollen die ersten 100 Zahlen als Einheiten dargestellt, darnach das Zehnersystem versinnbildlicht und endlich die Decimalbrüche veranschaulicht werden. Zu diesem Zwecke besteht der Apparat aus Drähten mit Kugeln und hat drei Abteilungen, welche verdeckt werden können. Behufs Veranschaulichung der ersten 100 Zahlen stellt man ihn so auf, dafs alle Drähte wagerecht laufen, und verdeckt so viel, dafs nur eine russische Maschine sichtbar bleibt. Zur Erklärung des Positionssystems giebt man den Drähten senkrechte Lage und Stellenwert, die Decimalbruchdrähte bleiben noch verdeckt. Zur Zahlendarstellung werden die Kugeln hoch gezogen, ein Federmechanismus verhindert ihr Herabfallen. Die Kugeln der vier letzten Drähte tragen das Kolorit der ihren Werten entsprechenden deutschen Reichsmünzen. Die dritte Aufstellung geschieht so, dafs auch die (sechs) senkrechten Decimalbruchdrähte sichtbar werden; die Kugeln auf denselben sind von abnehmender Gröfse gemäfs ihres Wertes. Man will das Nume-

1) Beschrieben in: Prausek a. a. O. S. 18 ff.

2) Beschrieben in Spiekers päd. Zeitschrift: Haus und Schule, Hannover 1879 S. 391 ff.

3) Rösener, Anweisung zum Gebrauche der Rösenerschen Rechenmaschine, Leipzig Klinkhardt 1879.

rieren, Addieren und Subtrahieren an der Maschine ausführen, letzteres ist im Falle des Borgens schon recht umständlich.

25. Raumers Rechenmarken[1]) sind für Eins, Zehn und Hundert weiſs und von wachsender Gröſse, für Tausend, Zehntausend, Hunderttausend und Million gelb und auch von zunehmender Gröſse. Auf der einen Seite ist der Wert mit indischen, auf der anderen mit römischen Zahlzeichen aufgeprägt, ein kreisrundes Pappscheibchen vertritt die Null. Mit diesen Marken wird vor der Kenntnis der Zahlzeichen das Legen der Zahlen gelehrt. 302 liegt beispielsweise so Ⓒ Ⓒ Ⓒ • Ⓘ Ⓘ.

b) Graphische.

26. Römische Zahlzeichen verwendet Zeller[2]) und zwar X (für 10 Einheiten) in neunmaliger Wiederholung. Über 99 geht er nicht hinaus. Bei Fortsetzung des Princips würden die folgenden römischen dekadischen Gruppenzeichen in neunmaliger Wiederholung auftreten. Zellers Bilder für die ersten neun Zahlen siehe oben S. 208.

27. Willkürliche Zahlzeichen. Düten als Zeichen für 10, Säckchen für 100 und Kästchen für 1000 findet man bei Schweitzer[3]), und zwar in neunmaliger Wiederholung. — Genannte Düten, Säckchen und Kästchen sollen von dem Philanthropen Busse erdacht sein[4]) und sich in seinem „Gemeinverständlichen Rechenbuche 1800 3. Aufl.“ vorfinden; dessen wir aber nicht habhaft werden konnten. — Krancke[5]) wählte das Quadrat als Zeichen für 10, den Kreis für 100 und das Dreieck für 1000. Die Wiederholung des Gruppenzeichens vermied er durch eingesetzte Punkte resp. Ziffern und schrieb 3245 = △ ⊙ ⊡ ∵ oder △ ② [4] 5.

Die brauchbarsten Anschauungsmittel sind diejenigen, bei denen sämtliche Einheiten getrennt und beweglich sind, weshalb unter den körperlichen die russische Maschine (mit Verdeckbrett) und die Berliner Knopftafel, und unter den graphischen die Punkte und Striche, als einfachste Zeichen, den Vorzug verdienen. Sie machen jede Einheit sichtbar und gewähren für deren Gruppierung die gröſste Freiheit. Diejenigen Apparate, bei denen die Einheitkuben zu Säulen und Platten vereinigt auftreten, sind weniger zweckmäſsig; zwar bleibt bei ihnen noch jede Einheit sichtbar, allein ihre Beweglichkeit ist gehindert und damit die Mannigfaltigkeit in der Gruppierung beeinträchtigt.

Die symbolischen Anschauungsmittel sind für Unterrichtszwecke wertlos. Durch die Kugelapparate (Nr. 21 bis 24) werden immer nur

---

1) Raumer, Gesch. d. Päd. 1880 III, 458 ff.
2) Zeller, Kleine Zahllehre in Zahlbildern, Stuttgart 1840.
3) Schweitzer, Methodik f. Elementarlehrer 1845 S. 160.
4) Nach Bräunlich, Volksthüml. Rechnen 1877, 3. Aufl. S. 2.
5) Krancke, Rechenfibel, Hannover 1829 S. 70 ff.

neun Einheiten veranschaulicht, der Inhalt der Stellenwerte Zehn, Hundert, Tausend etc. aber nicht; er wird von der Vorstellungskraft gefordert. Derartige Apparate leisten bezüglich der Stellenwerte nichts mehr als die Zifferschrift selbst. Bei 435 sieht man 4 Kugeln auf dem dritten, 3 auf dem zweiten und 5 auf dem ersten Drahte; und in der Schrift sieht man die Ziffern 4, 3 und 5 auf der dritten, zweiten resp. ersten Stelle; das ist dort wie hier genau dasselbe Kennzeichen, nämlich der verschiedene Ort. — Das verschiedene Kolorit (Nr. 23 u. 24) ist eine schädliche Zugabe, weil es störend wirkt. Der Schüler soll nach den ersten neun Zahlzeichen (und der Null) keine neuen mehr lernen, sondern soll lernen mit diesen Mitteln jede beliebig grofse Zahl ausdrücken. Demnach müssen mit Kugeln von gleicher Farbe auch die gröfseren Zahlen bezeichnet werden; dasselbe gilt für die Decimalbruchkugeln (Nr. 24) bezüglich deren Gröfse. Aufser der Verschiedenheit des Ortes darf man ein neues Unterscheidungszeichen (wie Farbe oder Gröfse) nicht brauchen, damit der Schüler die Vorstellung des Stellenwertes auch einzig und allein an den Ort knüpfe und an kein andres Merkmal. Deshalb verdienen die Apparate (Nr. 21 u. 22), welche nur Kugeln von gleicher Farbe und Gröfse haben, den Vorzug. Doch auch gegen diese besseren ist noch etwas Erhebliches einzuwenden. Wenn man auf einer Unterrichtsstufe, auf welcher man die Vorstellung der gröfseren Werte 10, 100, 1000 etc. an die örtliche Verschiedenheit der Kugeln knüpft, für die kleineren Werte 1 bis 9 noch die Kugeln selbst beibehält und den Gebrauch der Ziffer verschmäht, so liegt darin ein methodischer Fehler. Sobald für die gröfseren Werte die symbolische Darstellung für genügend erachtet wird, so mufs sie zu dieser Zeit für die kleineren erst recht genügen und der Gebrauch der Ziffer hat einzutreten.

Die symbolischen Zeichen (Nr. 27) sind nichts weiter als eine Nachahmung des römischen Zahlsystems und zur Einführung in Bau und Schreibweise des indischen Positionssystems ganz ungeeignet. Etwas nützlicher wäre es schon, die willkürlichen Bilder (Düten, Säckchen, Kästchen, Kreise, Dreiecke etc.) durch die römischen Gruppenzeichen X, C, M zu ersetzen, wie dies Raumer und Zeller (Nr. 25 u. 26) thun, aus welchem Gebrauche wenigstens ein praktischer Nutzen (wenn auch unbeabsichtigt), nämlich die Erlernung des römischen Zahlsystems, flösse. Indes ist der Gebrauch noch andrer Zahlzeichen aufser den indischen 0, 1, 2 .. 9 zweckwidrig, weil im Positionssysteme die über 9 hinausgehenden Zahlen nicht durch neue sondern durch die schon bekannten Zeichen ausgedrückt werden. Übrigens ist zu bemerken, dafs wenn die Vorstellung der Zahl durch ein Bild hervorgerufen werden soll, dieses Bild nur die Ziffer sein darf.

Veranschaulichung der Brüche. Quadrate, Stäbe, Cylinder, Strecken, Kreise sind die Objekte, die man der Teilung unterworfen hat, um den Begriff der gebrochenen Zahl zu veranschaulichen.

28. Auf Pestalozzis Bruchtabellen spielt das Quadrat die Rolle der Einheit; die Art der Teilung und den Gebrauch siehe oben S. 177.

29. Pöhlmanns Apparat[1]) besteht aus 16 vierkantigen Stäben à 16 Zoll lang, sie sind der Länge nach durchbohrt und befinden sich auf horizontalen Drähten. Der erste Stab ist ungeteilt und repräsentiert die Einheit, der zweite ist durch einen Querschnitt in 2 gleiche Stücke geteilt, der dritte ebenso in 3 etc., der sechzehnte in 16 gleiche Stücke geteilt. Die geteilten Stäbe veranschaulichen demnach die Brüche mit den Nennern 2 bis 16.

30. Hermanns Apparat[2]), erfunden vom Schulrat Hermann in Wien, ist eine Kopie des Pöhlmannschen. Man sieht auf 10 horizontalen Drähten 10 gleichlange Cylinder, den ersten ungeteilt, den zweiten in 2, den dritten in 3 etc., den zehnten in 10 gleiche Stücke geteilt. Die geteilten Cylinder veranschaulichen die Brüche mit den Nennern 2 bis 10.

31. Knillings Teillineal[3]) ist ein flaches 20 cm langes Lineal mit Teilungen an den 4 Rändern. An dem einen Rande ist es in Halbe, Viertel, Achtel und Sechzehntel, an dem zweiten in Drittel, Sechstel, Zwölftel und Vierundzwanzigstel, an dem dritten in Drittel, Neuntel und Achtzehntel, an dem vierten in Fünftel, Zehntel und Zwanzigstel geteilt. Das Lineal ist in den Händen der Schüler.

32. Wagners Bruchtafeln[4]) sind Pappscheiben, in Sektoren (Halbe, Drittel, Viertel etc.) geteilt. Die Sektoren einer Scheibe sind verschieden koloriert.

33. Körners Uhrzifferblatt[5]), bestehend aus einer Holzscheibe mit metallenen verstellbaren Zeigern, kann für eine beschränkte Anzahl von Brüchen zur Veranschaulichung dienen. Über die Benutzung dieses Hilfsmittels schrieb Böhme[6]) einen Artikel, wo auch interessante Fragen für reifere Schüler mit eingeflochten sind, z. B. wann stehen beide Zeiger über einander, wann gegenüber, wann im rechten Winkel?

Gegen die Bruchdarstellung durch Teilung von Strecken und solchen

---

1) Pöhlmann, Prakt. Anweisung, Kindern die Rechenkunst beizubringen 1804 II, Vorrede.

2) Beschrieben in: Prauseck, Lehrmittel zum Unterr. im Rechnen, Olmüz 1864 S. 14 ff.

3) Knilling, Reform des Rechenunterrichts 1887 II, 35—37.

4) Zu haben in Naumanns Buchhandlung, Dresden.

5) Zu haben in C. Winters Buchhandlung, Chemnitz. Preis 6,5 M.

6) In: Diesterweg, Rheinische Blätter 1886 S. 57—69.

Körpern, bei denen nur eine Dimension ins Auge fällt, läfst sich einwenden, dafs man wohl lange und kurze, aber nicht ganze, halbe, drittel etc. Strecken unterscheidet. Erst bei *benannten* Strecken (m, km etc.) treten Bruchteile von solchen auf. Zweckmäfsiger zur Teilung sind daher runde Objekte wie Kreise, Scheiben, Kugeln, Äpfel etc., weil bei diesen durch Verletzung der Form das Stück sogleich im Gegensatz zum Ganzen markiert wird. Auch in der Bildung besondrer Ausdrücke (Halbkreis, Quadrant, Sextant, Halbkugel) für Teile des Kreises und der Kugel kann man einen berechtigten Grund für die Bevorzugung runder Objekte von den linienförmigen finden.

**§ 101. Ausführung der Species.** Bezüglich der Ausführung der Species ist nur über die Subtraktion und Division einiges zu erwähnen. Sehr gerühmt werden die österreichische Subtraktions- und Divisionsmethode und ihr Wert wird vielfach überschätzt.[1]

Das unter dem Namen „*österreichische Subtraktion*“[2] geübte Verfahren lehrt den Wert einer Differenz durch Aufwärtszählen, ausgehend vom Subtrahenden, finden. Man giebt demnach durch das Resultat an, um wieviel Einheiten der Subtrahend vermehrt werden müfste, wenn man den Minuend erhalten wollte. a) Das schriftliche Verfahren. Da die schriftliche Berechnung des Wertes einer Differenz ziffernweis geschieht, so hat das Aufwärtszählen auf das „Dazulegen“ geführt, ähnlich wie das Abwärtszählen des „Borgens“ bedarf. — Man spricht, bei den Einern beginnend:

$$\begin{array}{r} 9718 \\ -\,6462 \\ \hline 3256 \end{array}$$

„2 und **6** ist 8, 6 und **5** ist 11, 5 und **2** ist 7, 6 und **3** ist 9.“ Die fetten Ziffern bilden den Rest. Erläuterung: Zur Einerdifferenz 8 — 2 = 6 ist nichts zu sagen. Die Berechnung der Zehnerdifferenz 1 — 6 kann nicht in der Weise erfolgen, dafs man von 6 bis 1 aufwärts zählt, die Aufwärtszählung kann nur bis 11 erfolgen. 11 entsteht durch Vermehrung der Minuendenziffer 1 um 10 (welche 10 aber nicht von 7 Hundert geborgt wird). Weil nun infolge der eben vorgenommenen Vergröfserung des Minuenden auch der Rest um 10 Zehner zu grofs werden würde, so zieht man zur Ausgleichung 1 Hundert mehr ab; deshalb berechnet man 7 — 5 = 2 als Hundertdifferenz etc.

Das *schriftliche* Verfahren der österreichischen Subtraktion hat vor der gewöhnlichen Methode (bei welcher man spricht: 8 minus 2 gleich 6, 11 minus 6 gleich 5, 6 minus 4 gleich 2, 9 minus 6 gleich 3) den Vorzug der Kürze nicht. Bei jener hat man ebensoviele Einheiten dazu-

---

1) Siehe einen Artikel von Hoch im Centralorgan fürs Realschulwesen 1883 Heft XI. — Dazu unsern Gegenartikel im Centralorgan 1884 S. 269 ff.

2) Vgl. unsern Artikel darüber in der Sächs. Schulzeitung 1884 Nr. 1.

zulegen, als man bei dieser borgen mufs. Übrigens ist das Borgen (Entlehnen, Verwandeln, Auflösen) dem Wesen der Species entsprechender als das Dazulegen. — b) Das Aufwärtszählen im Kopfe, weniger bekannt und geübt als das schriftliche, wird durch passende Sprünge in der natürlichen Zahlenreihe vollzogen und zeichnet sich infolge der Bewältigung gröfserer Zahlmassen auf einmal durch den Vorzug der Schnelligkeit aus vor dem Abwärtszählen, nach welcher Art der Subtrahend gemäfs der Anzahl seiner Stellen stückweis, beginnend mit der höchsten Ordnung, subtrahiert wird. Das Fundament für alles Aufwärtszählen bildet die Schlagfertigkeit in der Berechnung solcher Differenzen, deren Minuenden dekadische Einheiten sind (100 — 52, 1000 — 257 etc.). Durch einige Übung läfst es sich in dieser Fertigkeit weit bringen. Hierauf folgen Aufgaben von der Art wie: 126 — 53, Antwort: 47 + 26 = 73; oder 645 — 269, Antwort: 31 + 345 = 376; also solche Aufgaben, dafs aus der Summierung der beiden Stücke der Antwort kein neuer Hunderter erwächst. Ähnlich sind die Übungen bei vierstelligen Zahlen. Will man von dem Vorteile, der aus dem Aufwärtszählen entspringt, nichts einbüfsen, so mufs in gewissen Fällen[1]) die Differenz in zwei Teile zerlegt werden und zwar dann, wenn die beiden letzten Stellen im Subtrahenden weniger betragen als im Minuenden (669 — 245). Man könnte vorstehende Differenz auch so berechnen wie vorher, nämlich: 55 + 369 = 424; kürzer ist es aber, die Differenz der Hunderter und diejenige der übrigen Stücke gesondert zu berechnen, also 600 — 200 und 69 — 45. Nach der ersten Art resultiert aus der Addition der Zahlen 55 + 369 ein neues Hundert, wodurch der Vorteil sich verringert.

Der Vorteil des Aufwärtszählens im Kopfe, welcher besonders stark ins Auge springt, wenn die Glieder der Differenz zwei grofse nicht weit von einander abstehende Zahlen sind (4368 — 4357), ist begründet durch zwei Umstände, einmal damit, dafs man gröfsere Zahlen auf einmal bewältigt, und zweitens damit, dafs das Vorwärtszählen uns geläufiger ist als das Rückwärtszählen.[2])

Das Hinauszahlen („Wiedergeben“) des Kaufmanns auf ein empfangenes zu grofses Geldstück ist keine wirkliche Subtraktion[3]); denn wenn der Kaufmann beispielsweise 2,65 M zu empfangen hat und auf ein erhaltenes

1) Methodisch geordnet sind die Aufgaben fürs Aufwärtszählen im Kopfe in: Löwe-Unger, Aufg. zum Zahlenrechnen 1884 u. 1887 Heft A.

2) „Im Rechenunterrichte ist die Subtraktion nach der Methode, welche dieselbe auf die Addition zurückführt, einzuüben“, Cirkularverfügung d. Bad. Oberschulrats 16. Aug. 1883, vgl. Centralorgan fürs Realschulwesen 1884 S. 268.

3) Hoffmann ist gegenteiliger Ansicht, vgl. Zeitschrift f. math. Unterricht XIV, 107.

Zehnmarkstück einen Fünfer, drei Zehner und sieben Mark hinauszahlt mit den Worten: „70, 3 M, 10 M“, so ist das nur ein sprungweises Numerieren. Es fehlt noch die Addition jener Teile. Der Kaufmann weiſs in den meisten Fällen garnicht, wieviel er wiedergab; von dieser Thatsache kann man sich überzeugen, wenn man das Geld schnell bedeckt und ihn nach dem Betrage fragt. Zu einer Subtraktion gehört aber notwendigerweise die Angabe des Restes.

*Die österreichische Divisionsmethode.* Das Charakteristische derselben besteht darin, daſs man jede Divisorziffer mit der betreffenden Quotientenziffer multipliciert und das erhaltene Produkt, ohne es niederzuschreiben, sogleich vom Dividenden abzieht und zwar durch Aufwärtszählen. — Bei nebenstehendem Beispiele spricht man: „4 mal 5 gleich 20 und **5** ist 25; 4 mal 6 gleich 26 und **1** ist 27; 4 mal 3 gleich 14 und **2** ist 16; 3 herunter. 5 in den Quotient. 5 mal 5 gleich 25 und **8** ist 33; 5 mal 6 gleich 33 und **2** ist 35; 5 mal 3 gleich 18 und **3** ist 21; 5 herunter. 9 in den Quotient; geht auf“ (die fetten Ziffern sind die Restziffern). Bei Berechnung der Differenzen müssen die Minuendenziffern (d. h. die Ziffern der Teildividenden) bald um 10, 20, 30 ... oder 90 vermehrt werden, welche Beträge mit dem nächsten Produkte wieder zur Subtraktion kommen.

```
167535 : 365 = 459
 2153
  3285
 ------
```

Die vermeintlichen *Vorzüge*, welche die österreichische Divisionsmethode vor der gewöhnlichen (mit Anschreibung der abzuziehenden Produkte) besitzen soll[1]), haben wir in einem Artikel[2]) auf ihren wahren Wert reduciert. Bei Anwendung der österreichischen Divisionsmethode sind zur Ausrechnung eines Divisionsexempels genau so viele Multiplikationen und Subtraktionen zu vollziehen als bei Anwendung der gewöhnlichen Methode, und es besteht demnach bei jener bezüglich der zur Ausrechnung erforderlichen Operationen ein Gewinn nicht. Dessen ungeachtet wird nicht selten eine groſse Ersparnis an Raum und Zeit als Vorzug der österreichischen Methode angeführt. Raum wird zweifellos gespart, weil man die abzuziehenden Produkte nicht schreibt; indes ist das Papier nicht teuer. Auch wird vielleicht jene Unterlassung eine Zeitersparnis zur Folge haben, welche jedoch nicht erheblich ist, weil Denken und Schreiben fast gleichzeitig geschehen. Zur Berechnung des Produkts $365 \times 4$ spricht man nur: „**20**, **26**, **14**“; die fetten Ziffern werden im Augenblicke des Aussprechens geschrieben; alles andre denkt man. Damit wären die (sehr geringen) Vorteile der österreichischen Methode zu Ende.

1) Centralorgan fürs Realschulwesen 1883 Heft XI.

2) Sächs. Schulzeitung 1884 Nr. 1.

Nun folgen die Nachteile. a) Kommt im Quotient eine Ziffer mehr als einmal vor, so ist man bei der gewöhnlichen Division der erneuten Berechnung des abzuziehenden Produkts überhoben, was bei der österreichischen Methode nicht der Fall ist, da man das Gesamtprodukt garnicht bildet. b) Stehen Minuend und Subtrahend gehörig unter einander, so läfst sich der Wert ihrer Differenz oft mit einem Blicke „übersehen“, z. B.

$$\begin{array}{r} 2260 \\ -\underline{2160} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2165 \\ \underline{2160} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2485 \\ \underline{2160} \end{array}$$

Da man nun bei der österreichischen Methode die jeweiligen Subtrahenden ihrem Gesamtwerte nach garnicht kennt, so geht man bei genannter Divisionsart dieser nicht selten eintretenden Erleichterung verlustig. c) Die Aufsuchung eines Rechenfehlers durch nochmaliges Durchrechnen ist in dem nach der österreichischen Methode ausgeführten Schema ungleich mühsamer als in demjenigen der gewöhnlichen Methode. Wettrechnen, welche wir behufs Prüfung der beiden Methoden anstellten, lieferten immer das Ergebnis, dafs diejenigen Schüler, welche nach der österreichischen Methode dividieren mufsten, niemals eher fertig waren aber stets mehr Fehler hatten als die übrigen.

Nicht ihres praktischen Wertes sondern des historischen Interesses wegen nehmen wir hier Fouriers Regel der geordneten Division[1]) auf, nach welcher bei einem vielstelligen Divisor in der Hauptsache nur mit den beiden höchsten Stellen des Divisors (oder auch nur mit einer) dividiert wird. Jene zwei Stellen heifsen Stückdivisor (im Beispiele ist 92 der Stückdivisor). Bezeichnet man die auf ihn noch folgenden Ziffern des Divisors von links nach rechts mit $a, b, c$ .. und sämtliche Quotientenziffern in derselben Richtung fortschreitend mit $q_1 q_2 q_3 q_4 \ldots$, so läfst sich der Rechnungsverlauf folgendermafsen andeuten.

I. Man dividiere mit dem Stückdivisor in den zugehörigen Teildividenden und subtrahiere wie gewöhnlich das Produkt, gebildet aus $q_1$ mal Stückdivisor.

II. Ist der Rest $\geqq q_1$, so ziehe man die nächste Dividendenziffer herab und subtrahiere $aq_1$ von der dadurch entstandenen Zahl (das ist die erste Korrektion). Der Rest wird nun zur Ermittelung von $q_2$ durch den Stückdivisor dividiert und um das Produkt, gebildet aus $q_2$ mal Stückdivisor, vermindert.

III. Ist der nun erhaltene Rest $\geqq (q_1 + q_2)$, so hole man die nächste Dividendenziffer herab und subtrahiere $aq_2 + bq_1$ (d. i. die zweite Kor-

1) Fourier, Analyse des équations determinées, Paris 1831 S. 186 ff. Desgl. in: Schurig, Lehrbuch der Arithmetik 1883 I. — Desgl. in: Adam, Der Rechenkünstler 1885 S. 51 ff.

rektion). Der Rest wird zur Ermittelung von $q_3$ durch den Stückdivisor dividiert und um das Produkt $q_3$ mal Stückdivisor vermindert.

IV. Ist der neue Rest $\geq (q_1 + q_2 + q_3)$, so hole man die nächste Dividendenziffer herab und subtrahiere $aq_3 + bq_2 + cq_1$ (d. i. die dritte Korrektion). Der Rest wird zur Gewinnung von $q_4$ durch den Stückdivisor dividiert und um das Produkt aus Stückdivisor mal $q_4$ vermindert.

Wird der betreffende Divisionsrest nicht kleiner als die Summe der bereits gefundenen Quotientenziffern, so wird die Rechnung in angegebener Weise fortgesetzt. Der Herunternahme einer Dividendenziffer folgt allemal erst eine Korrektion, ehe die nächste Quotientenziffer bestimmt werden darf. Die Korrektion besteht immer in der Subtraktion einer Summe von Produkten; das Bildungsgesetz der Produkte ist zu erkennen aus folgendem Schema für die ersten 5 Korrektionen:

Erste Korrektion: $aq_1$.
Zweite Korr.: $aq_2 + bq_1$.
Dritte Korr.: $aq_3 + bq_2 + cq_1$.
Vierte Korr.: $aq_4 + bq_3 + cq_2 + dq_1$.
Fünfte Korr.: $aq_5 + bq_4 + cq_3 + dq_2 + eq_1$.

Angeführte Korrektionen haben jedoch nur Geltung, solange der Stückdivisor unverändert bleibt. Mufs dieser aber um eine Ziffer vermehrt werden — und das hat stattzufinden, wenn der Divisionsrest kleiner wird als die Summe der schon gefundenen Quotientenziffern —, so hat man auch die verbleibenden Dividendenziffern neu zu bezeichnen, etwa mit $\alpha\ \beta\ \gamma \ldots$ (wie im Beispiele).

V. In dem Falle, dafs der Divisionsrest kleiner ist als die Summe der schon gefundenen Quotientenziffern, ist die letzte Division nicht zu gebrauchen; man mufs die letzte Quotientenziffer löschen und die durch sie verursachte Subtraktion wieder rückgängig machen. Ist dies geschehen, so vermehrt man sowohl den Stückdivisor als auch den Teildividend um eine Ziffer und bezeichnet die nachfolgenden Ziffern des Divisors mit neuen Buchstaben $\alpha\ \beta\ \gamma \ldots.$ Vor der Bestimmung der neuen Quotientenziffer mufs erst noch eine Korrektion nach Art der oben erwähnten eintreten. — Hat man die neue Quotientenziffer endlich bestimmt und die erforderliche Subtraktion vollzogen und ist jetzt ebenfalls (wie im Beispiele) der Divisionsrest kleiner als die Summe der gefundenen Quotientenziffern, so ist auch diese Division unbrauchbar, und der letzte Teildividend mufs wieder hergestellt werden. Stückdivisor und Teildividend sind je um eine Ziffer zu vergröfsern und die noch übrigen Divisorziffern neu zu bezeichnen $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{d} \ldots.$ Hierauf hat eine Korrektion wie oben zu erfolgen und dann kann die neue Quotientenziffer bestimmt werden.

Wenn jedoch der Divisionsrest gröfser als die Summe der bereits gefundenen Quotientenziffern oder ihr gleich ist, so kommt das unter I bis IV angegebene Verfahren zur Anwendung, welches stets eine giltige Quotientenziffer liefert.

$5024967581 : \overline{9}2563 = 54287$

$a\ b\ c \quad q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_5$

$\alpha\ \beta$

$460$

$424 \ldots\ 42 > 5 \quad a$

$25 \ldots\ aq_1 = 5 \cdot 5 = 25$

$399 : 92 = 4 = q_2$

$368$

$319 \ldots\ 31 > 5 + 4$

$50 \ldots\ aq_2 + bq_1 = 20 + 30 = 50$

$269 : 92 = 2 = q_3$

$184$

$856 \ldots\ 85 > 5 + 4 + 2$

$49 \ldots\ aq_3 + bq_2 + cq_1 = 10 + 24 + 15 = 49$

$807 : 92 = 8 = q_4$

$736$

$717 \ldots\ 71 > 5 + 4 + 2 + 8$

$64 \ldots\ aq_4 + bq_3 + cq_2 + dq_1 = 40 + 12 + 12 + 0 = 64$

$653 : 92 = 7$

unbrauchbar $\begin{cases} 644 \\ 9 \ldots\ 9 < 5 + 4 + 2 + 8 + 7 \end{cases}$

. . . . .

$6535$

$54 \ldots\ \alpha q_4 + \beta q_3 = 48 + 6 = 54$

$6481 : 925 = 7$

unbrauchbar $\begin{cases} 6475 \\ 6 \ldots\ 6 < 5 + 4 + 2 + 8 + 7 \end{cases}$

. . . . . .

$64818$

$24 \ldots\ aq_4 = 24$

$64794 : 9256 = 7$

unbrauchbar $\begin{cases} 64792 \\ 2 \ldots\ 2 < 5 + 4 + 2 + 8 + 7 \end{cases}$

. . . . . . .

$647941 : 92563 = 7$

$647941$

§ 102. **Kaufmännische Arithmethik.** Da unter den Faktoren der kaufmännischen Bildung die Rechenkunst die erste Stelle einnimmt, so ist es leicht erklärlich, dafs die Handelsschule, welche die Vorbereitung für den Kaufmannstand gewährt, diejenige Anstalt ist, welche gegenwärtig den wohlverdienten Ruf geniefst, die vorzüglichste Pflanzstätte der praktischen Rechenkunst zu sein. Kein andrer Stand hat sich so sehr unter die Macht der Zahl zu beugen als der Kaufmann; kein andrer kann aber auch die Zahl so sehr zu seinem Vorteile ausbeuten als dieser.

Kaufmännische Arithmetik nennt man das in Handelsschulen gelehrte Rechnen. Es erstreckt sich auf alles, was Gegenstand des Handels geworden ist, auf Ware, Geld und Geldeswert. Die arithmetischen Grundoperationen mit ganzen und gebrochenen Zahlen werden als bekannt vorausgesetzt und der Kursus beginnt gewöhnlich mit der Procentrechnung, worauf Zins-, Rabatt-, Gesellschafts-, Mischungs-, Termin-, Münz-, Effekten-, Wechselrechnung, Warenkalkulationen und Kontokorrenten folgen. Das Rechnen selbst mufs auch das Gepräge des echt kaufmännischen Verkehrs tragen; es mufs kurz und bündig, übersichtlich und von gefälliger Form sein. Um die thunlichste Kürze zu erreichen, werden nicht selten in einem Vorkursus sämtliche Rechnungsvorteile gelehrt, welche in kaufmännischen Kreisen als bewährt befunden worden sind und die wir der Mehrzahl nach auf unserem Entwickelungsgange kennen gelernt haben. In „E. Amthor, Quintessenz des kaufmännischen Rechnens 1862“ ist die Gesamtheit aller Rechnungsvorteile einleitungsweise unter dem Titel „Wälsche Praktik“ aufgenommen. Auf die Wiedergabe von Einzelheiten dürfen wir unter Hinweis auf die reiche Litteratur[1]) verzichten. Wir beschränken uns hier auf Vorführung einer bis jetzt noch nicht berührten Partie, des Kontokorrents, welches in diesem Jahrhundert erst in Aufnahme kam, und werden vornehmlich die verschiedenen Methoden der Zinsenberechnung besprechen.

Läfst ein Kaufmann seine Zahlungen durch ein Bankhaus leisten und auch seine Forderungen durch dieses einziehen, so nennt man die vom Bankier darüber geführte Rechnung ein Kontokorrent[2]) (conto corrente,

1) A. Schiebe, Lehrbuch d. kaufm. Arithm. 1834 u. später. — Feller-Odermann, Das Ganze d. kaufm. Arithm. 1866, 10. Aufl. — Braune, Kaufm. Arithm. — Schiebe-Odermann, Lehrbuch der Kontorwissenschaft 1871, 7. Aufl. — Salomon, Kaufm. Rechenbuch. — Amthor und Gerothwohl, Comptoir und Börse 1873, 3. Aufl. — Rothschild, Taschenbuch für Kaufleute 1885, 29. Aufl. — Swobodas Schriften: a) Bankgeschäft, b) kaufm. Arbitrage, c) der internationale Arbitrageur, d) Lehrbuch der Handelsarithmetik. U. a. m.

2) Behandelt in: Schiebe, Universallexikon der Handelswiss. 1837 I, 373 ff. Montag, Die vorzüglichsten prakt. Regeln und Rechnungsvortheile, Weimar 1841. Dittmann, Anweisung f. Comtoiristen, ein Conto-Corrent aufzumachen, Hamburg

compte courant, account current, der und das). Der Kommittent erhält davon jährlich oder halbjährlich eine Abschrift. Für die Debetposten fordert der Bankier vom Verfalltage (auch Skadenz) bis zum Abschlufstermine Zinsen, während er für die Kreditposten solche vergütet. Ein Kontokorrent enthält demnach auf jeder Seite eine Kolumne für die Kapitale, eine für die Verfallzeiten, eine für die zu verzinsenden Tage, eine für die Zinsen resp. Zinszahlen.

Die Zinsenberechnung kann auf vier verschiedenen Wegen geschehen.

1. Zinsenberechnung mit Zinsposten. Nach dieser Methode werden die Zinsen für jeden Kapitalposten gesondert berechnet und in die Zinsenkolumne ausgeworfen. Der Abschlufs des Kontokorrents ist hierbei leicht. Man berechnet zuerst den Zinsensaldo und stellt ihn auf die gehörige Seite, fügt dann die Beträge für Provision, Courtage, Porto und Stempel hinzu, zieht den Saldo und trägt ihn auf neue Rechnung vor.

2. Mit Zinszahlen nach progressiver Methode (Schema I). Hierbei stellt man in die Zinsenkolumne nur die Zinszahlen („Nummern" in Österreich), d. h. die Produkte aus den Kapitalen mal den Tagen. Zur Gewinnung des Zinsensaldo zieht man den Saldo der Zinszahlen und dividiert diesen durch den Zinsdivisor (auch „Schlüsselzahl"). Der Zinsenberechnung liegt die Formel $\frac{cnp}{100 \cdot 360}$ zu Grunde, worin $c$ das Kapital, $p$ die Procente und $n$ die Tage bedeuten; der variable Faktor $cn$ jener Formel liefert die Zinszahlen, der konstante Faktor $\frac{p}{100 \cdot 360}$ geht bei geeignetem $p$ in einen Stammbruch über und liefert dann den Zinsdivisor, welcher für 3%, $3\frac{1}{3}$%, 4%, $4\frac{1}{2}$%, 5%, 6% der Reihe nach 12000, 10800, 9000, 8000, 7200, 6000 ist. Bisweilen verkürzt man die Zinszahlen um zwei Stellen und hat dann auch vom Zinsdivisor zwei Nullen fortzulassen. Zur Berechnung der Zinszahlen bringt man vom Kapitale nur ganze Münzeinheiten in Ansatz und rechnet die Bruchteile der Einheit für eine volle, wenn sie 0,5 oder mehr betragen, während kleinere Beträge ignoriert werden. Dasselbe Princip der Abrundung beobachtet man auch bei der Verkürzung der Zinszahlen um zwei Stellen.

Enthält ein Kontokorrent Kapitale, deren Verfallzeiten hinter dem Abschlufstermine liegen, so haben diese Posten offenbar am Abschlufstermine einen geringeren Wert, sie müssen also diskontiert werden (es

---

1846. — Noback-Steger, Allgemeine Encyklopädie f. Kaufleute 1864 S. 619 ff. — Kitt, „Über Conto-Corrente" im Jahresbericht d. Wiener Handelsakad. 1865. — Schulten, Erklärung der Conto-Corrente, Duisburg 1875, 2. Aufl. — Berger, „Die Conto-Corrent-Zinsenrechnung" im Jahresbericht d. Handelsak. zu Graz 1880. — Schiebe-Odermann, Die Contorwissenschaft 1871, 7. Aufl. S. 99—246.

geschieht vom 100). Um dies anzuzeigen, trägt man die Tage (zwischen Verfalltag und Abschlufstag) und die dazu gehörige Zinszahl mit roter Tinte ein (rote Zahlen). Die roten Zahlen tragen demnach einen subtraktiven Charakter, während die schwarzen Zahlen den additiven besitzen. Statt aber die roten Zahlen auf der Seite ihres Erscheinens zu subtrahieren, addiert man sie auf der entgegengesetzten Seite, was denselben Effekt giebt. Treten auf beiden Seiten rote Zahlen auf, so ist nur die Differenz ihrer Summen auf derjenigen Seite zu addieren, auf der die schwächere rote Summe sich ergab, weshalb man den Saldo der roten Zahlen erst zur Ausgleichung rot und dann zur eigentlichen Wirkung auf derselben Seite schwarz einträgt. Liefert die Debetseite die gröfsere Zinszahlensumme, so ist der Kommittent Zinsen schuldig, und er ist mit den aus der Zinszahlendifferenz sich ergebenden Zinsen zu belasten; liefert dagegen die Kreditseite die gröfsere Zinszahlensumme, so sind ihm die aus dem Zahlensaldo entstehenden Zinsen zu kreditieren.

Sind die Zinsen gehörig entwickelt, so schreitet man zur Berechnung der Provision (gewöhnlich $\frac{1}{8}\%$ bis $\frac{1}{2}\%$). Provision wird nicht von beiden Seiten des Kontokorrents berechnet, weil der Bankier von jedem Geschäfte nur einmal Provision zu fordern berechtigt ist. Sie wird stets von der stärkeren Seite berechnet, jedoch nach Abzug sämtlicher provisionsfreien Posten. Provisionsfrei sind: der aus voriger Rechnung übertragene Saldo, weil dieser schon Provision getragen hat, die Frankoposten, die Warenposten.

Courtage (Maklerlohn, Sensarie) wird bei Wechseln auf ausländische Plätze beansprucht, weil sich bei solchen Geschäften der Bankier eines Maklers (Sensal) bedienen mufs oder doch die Notwendigkeit seiner Vermittelung begründen kann.

Zum Schlufs wird der Kommittent mit dem verlegten „Porto und Stempel“ belastet. — Alle in das Kontokorrent beim Abschlusse aufgenommenen Posten erhalten das Datum des Abschlufstages.

Die sich nun ergebende Differenz in den Beträgen beider Seiten des Kontokorrents ist der reine Saldo. Er wird zur Ausgleichung auf die Seite der schwächeren Summe mit der Bezeichnung „zu unserm“ resp. „zu Ihrem Gunsten“ eingestellt und dann auf die entgegengesetzte Seite als Guthaben mit der Bezeichnung „Saldovortrag“ gesetzt und geht schliefslich als erster Posten in die neue Rechnung über.

Eine Erleichterung in der Berechnung der Zinszahlen gewähren die Multiplikationstabellen[1]) von Hinrichsen. Das Buch hat 92 Seiten (Oktav);

1) Hinrichsen, Multiplikationstabelle der Zinszahlen bei Conto-Correnten von der geringsten bis zur höchsten Summe zu allen Münzen der Welt, Hamburg 1862.

auf der ersten stehen keine Zahlen; je zwei gleichzeitig aufgeschlagene Seiten gehören zusammen und zwar insofern, als sie in der ersten Kolumne stets die Zahlen 1 bis 99 für die Kapitale enthalten, die übrigen acht Kolumnen sind mit den Tagen (365, 364, 363 . . . 358 auf IIter und IIIter Seite) überschrieben und enthalten die ersten 99 Produkte ihrer überschriebenen Zahlen. Für sämtliche ein- und zweistelligen Kapitale können demnach die Zinszahlen direkt entnommen werden, während man bei gröfseren Kapitalen noch einer Addition bedarf. Hätte man das Kapital 53 621 und 339 Tage, so würde die Rechnung mit Benutzung der Tabelle wie nebenstehend aussehen. Dazu ist die Seite aufzuschlagen, auf welcher sich die mit 339 Tagen überschriebene Kolumne befindet; man findet daselbst neben den Zahlen 5, 36 und 21 der ersten Kolumne die hier verwendeten Produkte.

| | |
|---|---|
| 5.... | 1695 |
| 36.. | 12204 |
| 21 | 7119 |
| | 18177519 |

Der Zeitgewinn ist bei Benutzung der Tabelle nicht erheblich, wohl aber hat der Rechner die Gewähr gröfserer Sicherheit für seine Resultate. Crelles Rechentafeln (siehe § 74) leisten bedeutend mehr.

3. Mit Zinszahlen nach retrograder Methode (Schema II); auch die Methode mit Diskontzahlen, brabanter, französische Methode, Epoche-Rechnung[1]) genannt. — Da sich am Ende des Geschäftsjahres in Bankhäusern die Arbeit häuft, so sucht man die Kontokorrenten vorher möglichst weit fertigzustellen. Weil nun aber auch der Fall eintreten kann (bei Konkurs, Todesfall), dafs das Kontokorrent an einem früheren Tage als dem postulierten Abschlufstermine (30. Juni, 31. December) abgeschlossen werden mufs, so wäre entweder jene Vorarbeit ganz umsonst gethan, oder man müfste den für ultimo December berechneten Saldo auf den verlangten Abschlufstag diskontieren. Diese Umstände haben auf eine andre Methode, die retrograde Zinsenberechnung, geführt, welche zwei Vorteile vor der progressiven gewährt: erstens den, dafs die Vorausberechnung des Kontokorrents sowie auch der Abschlufs an jedem beliebigen Tage möglich wird, ohne diesen vorher wissen zu müssen; zweitens den, dafs man der roten Zahlen nicht bedarf. Das Verfahren beruht darauf, dafs man die früheste Skadenz (d. h. gewöhnlich den Eröffnungstermin) als Abschlufstag fingiert. Weil nun infolge dieser Annahme die Verfallzeiten sämtlicher Debet- und Kreditposten hinter dem Abschlufstage liegen, so müssen die Posten selbst an diesem Tage einen geringern Wert haben und demzufolge diskontiert werden. Der Saldo ist nun auch zur frühesten Skadenz (zum fingierten

1) Epoche (Epoque) heifst der Tag, auf welchen sämtliche Skadenzen der Zinsenberechnung wegen zurückgeführt werden.

Abschlufstage) fällig; weil er aber erst am Tage des wirklichen Abschlusses fällig erscheinen mufs, so sind überdies noch die Zinsen vom Rohsaldo (auch Brutto- oder Kapitalsaldo) auf die Zeit vom fingierten bis zum wirklichen Abschlufstage in Rechnung zu bringen, und zwar hat die zugehörige Zinszahl auf die Seite der schwächeren Kapitalsumme zu kommen; denn es ist klar, dafs beispielsweise ein Guthaben per 1. Juli ein halbes Jahr später einen gröfseren Wert haben mufs. Es tragen bei dieser Methode sämtliche Zinszahlen auf der Seite, auf der sie erscheinen, einschliefslich der des Rohsaldo den Charakter roter Zahlen. Dadurch aber wird aus der früheren Ausnahme inbezug auf rote Zahlen eine Regel und es liegt kein Grund mehr vor, für diese Zahlen die rote Tinte zu gebrauchen, wenn man nur den subtraktiven Charakter der Zahlen auf jeder Seite festhält. Dieser vermindernden Bedeutung wegen nennt man diese Zahlen Diskontzahlen. Nachdem die Zinsenberechnung erledigt ist, wird der weitere Abschlufs wie bei voriger Methode vollzogen (vgl. Schema II).

4. Die Staffelrechnung (auch Hamburger Stufenleiter). Berechnet der Bankier dem Kommittenten für dessen Guthaben die Zinsen zu einem geringeren Zinsfufse als für sein eigenes, oder vergütet er ihm gar keine Zinsen, sobald er dessen Schuldner wird, so liefern die bis jetzt angeführten Methoden kein richtiges Resultat. Bei zweierlei Zinsfufs mufs man stets wissen, wer der jeweilige Gläubiger ist, wie lange und mit wieviel er es ist. Daraus läfst sich ersehen, wer Anspruch auf Zinsen hat. Die Berechnung derselben läfst sich mit dem Kontokorrent nicht vereinigen, sie mufs auf einem besonderen Blatte, der Zinsnota, erfolgen. In der Zinsnota werden die Kapitale nach der chronologischen Reihenfolge ihrer Verfalltage (mit den Zeichen C oder D, Kredit oder Debet) untereinandergesetzt. Nach jedem neu hinzugekommenen Posten zieht man den Kapitalsaldo und berechnet für diesen die Zinsen resp. Zinszahl auf so viele Tage als der betreffende Betrag keine Änderung erfährt. Zinszahlen für solche Posten, welche über den Abschlufstag hinausgehen und von diesem Tage bis zum Verfalltage berechnet werden, sind ihrer Natur nach rote Zahlen, welche man sofort in die entgegengesetzte Kolumne schwarz einstellt. Hierauf addiert man sowohl im Kredit als auch im Debet alle Zinszahlen und berechnet mit Hilfe des zugehörigen Zinsdivisors die Zinsen für jede Summe gesondert. Die Differenz der Zinsen gelangt dann als Zinsguthaben auf der gehörigen Seite im Kontokorrent zur Einstellung. Der weitere Abschlufs erfolgt wie bei den vorigen Methoden (siehe Schema III).

Die Staffelrechnung ist sehr durchsichtig, jedoch wegen der Anfertigung einer besonderen Zinsnota etwas weitläufig. Angenehm ist dabei der Umstand, dafs jeden Augenblick das annähernde Schuldverhältnis vor Augen liegt. — Werden Posten, deren Verfallzeit hinter dem Abschlufs-

termine liegen, in der Weise behandelt, wie hier geschehen ist, so liefert die Rechnung ein falsches Resultat, und zwar entspringt der Fehler aus den Zinsen der späteren Posten. Indem nämlich hinsichtlich dieser Posten nicht das jeweilige von Geschäftsvorfall zu Geschäftsvorfall wechselnde Schuldverhältnis ermittelt wird, werden die Zinsen entweder zu hoch oder zu niedrig eingestellt und man begeht eben den Fehler, den man durch die Staffelrechnung vermeiden will. Von der Fehlerhaftigkeit des Endresultats kann man sich durch eine Proberechnung überzeugen. Man vollziehe den Abschlufs des Kontokorrents an einem Tage, der nach dem letzten Verfalltage liegt. Wählen wir für das Beispiel in Schema III den 31. März als solchen, so würde die gewöhnliche staffelförmige Fortführung der Zinsnota folgende sein:

| | | | | | Debetzahlen | Kreditzahlen |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | D | 1077.92 M | bis 31. Dec. | | 1380 | 455 |
| | | 1077.92 | bis 15. Jan. | 15 Tg | 162 | — |
| 15. Jan. | D | 820 | | | | |
| | D | 1897.92 | bis 15. Febr. | 30 Tg | 569 | — |
| 15. Febr. | C | 463.58 | | | | |
| | D | 1434.34 | bis 20. Febr. | 5 Tg | 72 | — |
| 20. Febr. | D | 391.36 | | | | |
| | D | 1825.70 | bis 4. März | 14 Tg | 256 | — |
| 4. März | C | 350. | | | | |
| | D | 1475.70 | bis 31. März | 26 Tg | 384 | |
| Zinsensaldo | | 40.73 | | | 2823:60 | 455:72 |
| (Prov. Court. etc.) | | 23.76 | | | 47.05 M | 6.32 M |
| Saldo | M | 1540.19 | per 31. März. | | | |

Dieser Betrag müfste sich auch ergeben, wenn man (in Schema III) den reinen Saldo per 31. December 1518.93 um die 6procentigen Zinsen des Rohsaldo 1475.70 auf die Zeit vom 1. Januar bis 31. März vermehrte; also 1518.93 M + 22.14 M = 1541.07 M per 31. März. Erheblich ist der Unterschied in diesem Falle nicht; er kann es aber werden, wenn die Posten gröfser sind und das Schuldverhältnis zwischen Bankier und Kommittent wechselt.

Soll die Staffelrechnung ein richtiges Resultat liefern, so müssen diejenigen Posten, deren Verfallzeiten hinter dem Abschlufstage liegen, aus dem Kontokorrent ausgeschieden und auf neue Rechnung vorgetragen werden. In gewissen Fällen kann zwar auch bei ihrer Aufnahme ein

richtiges Resultat erscheinen, doch würde ein näheres Eingehen[1]) auf die Sache hier zu weit führen. Unter das Kontokorrent setzt der Aussteller gewöhnlich die Anfangsbuchstaben S. E. et O. von Salv Errore et Omissione d. h. unter Vorbehalt eines Irrtums und einer Auslassung; indes ist der Bankier auch ohne diesen Zusatz berechtigt, einen nachträglich entdeckten Irrtum zu berichtigen.

Das rechtliche[2]) Kontokorrentverhältnis ist eine Schöpfung neuerer Zeit und wurde durch die französische Revolution 1789 veranlafst. Name und Sache sind jedoch älter. Der Hamburger Buchhalter Rademann lehrte[3]) schon 1714 die Führung eines „Copeybuches" und darin die Aufstellung der „Conto-Couranti"; die Posten entspringen zwar reinen Wechselgeschäften, doch fehlt noch jedwede Zinsberechnung. Auch ist die Anrechnung solcher nicht erwähnt; und nach dem Motto, welches er seiner Buchhaltung vorsetzte („Schäme dich nicht, alle Ausgaben und Einnahmen anzuschreiben" Sirach XLII, 7), ist anzunehmen, dafs er selbst keinen Posten einzutragen unterliefs. Den Gebrauch der Zinszahlen nach progressiver Methode konnten wir nur bis Clausberg[4]) 1732 zurückverfolgen. Die Zinsenberechnung nach retrograder Methode kam erst im Anfange dieses Jahrhunderts auf und zwar in Frankreich. Im Jahre 1816 sah Schiebe[5]), einer der berühmtesten Schriftsteller über Handelswissenschaften, das erste nach retrograder Methode ausgeführte Schema; ein Lyoner Bankhaus legte es ihm zur Prüfung vor, woraus man sieht, dafs die Sache damals für die Kaufleute eine ungewohnte Neuheit war. Selbständige Schriften über das Kontokorrent datieren erst aus dem 19. Jahrhundert und zwar auch nur aus den letzten Jahrzehnten. In der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts waren die Zinsberechnungsmethoden bei Kontokorrenten noch wenig bekannt. So zeigt beispielsweise J. B. Montag, der sich ausdrücklich Lehrer

---

1) Siehe darüber: Schiebe, Contorwissenschaft. Desgl. Kitt, Conto-Corrente im Jahresber. d. Wiener Handelsakademie 1865.

2) Creizenach, Das kaufm. Conto-Corrent im Archiv f. prakt. Rechtswissenschaft 1857 IV, 31—74. Desgl. Freudenstein, Die Rechtsverhältnisse aus dem kaufm. Conto-Corrent 1883.

3) Rademann, Der Wehrtgeschätzte Handelsmann, anweisend, wie eine dreyjährige Generalhandlung / welche sowohl inn als aufserhalb / zu Wasser und zu Lande / Proper, in Commission & Comp. geführt worden / in ein richtiges Memorial zu beschreiben / aus solchem ins Journal, Hauptbuch und andere Nebenbücher einzutragen / zu stylisiren und auffs allerkürzeste itziger Zeit und Usance der Negotie nach einzurichten / zu saldiren und zu bilantziren sey, Hamburg 1714 Bl. 21—23.

4) Clausberg, Demonstrative Rechenkunst 1732.

5) Schiebe, Contorwissenschaft 1871 I, 135.

**Schema I.** (Zinsenberechnung nach progressiver Methode, mit roten Zahlen.)

Herrn **Gustav Damn**

*Soll*

| 1887 | | | | Tage | Zahlen | M |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Jan. | 1 | An Saldo laut vor. Kontokorrent | Dec. 31 | 180 | 424 620 | 2358 |
| Febr. | 2 | „ Ihre Tratte °/A. Krieg | März 30 | 90 | 142 920 | 1588 |
| „ | 2 | „ „ „ °/B. Frieden | April 10 | 80 | 184 000 | 2300 |
| März | 9 | „ unsere Rimesse auf London | März 9 | 111 | 414 474 | 3733 |
| April | 18 | „ Ihre Tratte °/J. Kaiser | Juli 15 | **15** | **69 375** | 4625 |
| „ | 18 | „ „ „ °/W. König | „ 5 | **5** | **12 585** | 2517 |
| Mai | 24 | „ Spesen auf 16 Sack Samen | Mai 24 | 36 | 5 616 | 155 |
| „ | 25 | „ unsere Rimesse auf Hamburg | Mai 25 | 35 | 43 330 | 1237 |
| Juni | 6 | „ „ „ auf New-York fco Court. | Juni 6 | 24 | 64 752 | 2698 |
| „ | 19 | „ Ihre Tratte °/A. Pollack | Juli 15 | **15** | **53 085** | 3538 |
| „ | 19 | „ „ „ °/J. Goldmann | Juli 10 | **10** | **30 000** | 3000 |
| „ | 19 | „ „ „ °/H. Busch | Aug. 15 | **45** | **162 990** | 3622 |
| Juni | 30 | An Saldo der Zinszahlen | | | 374 051 | |
| „ | 30 | „ Prov. von M 23 667,30 à $\frac{1}{3}$% | | | | 78 |
| „ | 30 | „ Court. von M 8 872,75 à 1‰ | | | | 8 |
| „ | „ | „ Stempel und Porto | | | | 9 |
| | | | | | 1 653 763 | 31472 |
| Juli | 1 | An Saldovortrag | Juni 30 | | **328 035** | 4299 |

Irrt

Berlin, de

**Becker**

Anmerkungen: Zur Zinsenberechnung. Saldo der roten (fetten) Zahlen im Soll ist 59 459, welcher hier subtraktiv, im Haben aber additiv wirkt, wo er doppelt eingestellt ist, einmal zur Ausgleichung rot und dann zur eigentlichen Wirkung schwarz. Summa der schwarzen Zahlen plus des roten Saldos im Haben 1 653 763. Summe der schwarzen Zahlen im Soll 1 279 712, folglich Saldo im Haben 374 051, das sind M 51,95 Zinsensaldo im Haben.

## eipzig. Zinsen 5%.

*Haben*

| 887 | | | | Tage | Zahlen | M | ₰ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| . | 10 | Per Ihre Rimesse auf J. Bär hier | Jan. 30 | 150 | 322 500 | 2150 | — |
| r. | 6 | „ „ „ auf Paris | Febr. 6 | 144 | 203 616 | 1413 | 75 |
| | 21 | „ Verkaufsrechnung über Samen | „ 21 | 129 | 670 026 | 5193 | 90 |
| rz | 17 | „ Ihre Rimesse auf Petersburg | März 17 | 103 | 256 161 | 2487 | 40 |
| ril | 14 | „ „ „ auf Rofs hier | Mai 25 | 35 | 90 440 | 2583 | 80 |
| i | 6 | „ „ „ auf Magdeburg fco Court. | Juni 15 | 15 | 42 825 | 2855 | 30 |
| | 25 | „ „ „ auf G. Bossart hier | Juli 23 | **23** | **68 839** | 2993 | — |
| | 25 | „ „ „ auf A. Löwe hier | Juni 24 | 6 | 8 736 | 1456 | 40 |
| i | 12 | „ „ „ auf E. Vogel hier | Juli 31 | **30** | **106 740** | 3558 | — |
| | 24 | „ „ „ auf M. Hahn hier | Aug. 11 | **41** | **91 143** | 2222 | 80 |
| | 24 | „ „ „ auf C. Seemann hier | Juli 9 | **9** | **1 854** | 206 | 45 |
| | 30 | „ Saldo der roten Zahlen | | | **59 459** | | |
| | | | | | 59 459 | | |
| i | 30 | Per Saldo der Zinsen | | | | | |
| | 30 | à 5% 374 051 : 7200 | | | | 51 | 95 |
| | | „ Saldo zu unsern Gunsten | | | | 4299 | 81 |
| | | | | | 1 653 763 | 31472 | 56 |
| | | | | | **328 035** | | |

vorbehalten.

30. Juni 1887.

**& Comp.**

Berechnung der Provision.

Die gröfsere Kapitalsumme ist im Soll

M 31 375,70 davon ab 2358,80 } Soll
155,70 } Soll
5193,90 Haben
7 708,40

M 23 667,30 für die Provision.

Courtage ist zu berechnen von:

| | | |
|---|---|---|
| Rᵉ London | 3733,80 | Soll |
| Rᵉ Hamburg | 1237,80 | Soll |
| Rᵉ Paris | 1413,75 | Haben |
| Rᵉ Petersburg | 2487,40 | Haben |
| M | 8872,75 | |

**Schema II.** (Zinsenberechnung nach retrograder Methode.)

Herrn **Gustav Damm,**

*Soll*

| 1887 | | | | | Tage | Zahlen | M | ₰ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Jan. | 1 | An Saldo laut vor. Kontokorrent | Dec. | 31 | — | — | 2358 | 8 |
| Febr. | 2 | „ Ihre Tratte °/A. Krieg | März | 30 | 90 | 142 920 | 1588 | – |
| „ | 2 | „ „ „ °/B. Frieden | April | 10 | 100 | 230 000 | 2300 | – |
| März | 9 | „ unsere Rimesse auf London | März | 9 | 69 | 257 646 | 3733 | 8 |
| April | 18 | „ Ihre Tratte °/J. Kaiser | Juli | 15 | 195 | 901 875 | 4625 | – |
| „ | 18 | „ „ „ °/W. König | „ | 5 | 185 | 465 645 | 2517 | 1 |
| Mai | 24 | „ Spesen auf 16 Sack Samen | Mai | 24 | 144 | 22 464 | 155 | 7 |
| „ | 25 | „ unsere Rimesse auf Hamburg | Mai | 25 | 145 | 179 510 | 1237 | 8 |
| Juni | 6 | „ „ „ auf New-York fco Court. | Juni | 6 | 156 | 420 888 | 2698 | 2 |
| „ | 19 | „ Ihre Tratte °/A. Pollack | Juli | 15 | 195 | 690 105 | 3538 | 9 |
| „ | 19 | „ „ „ °/J. Goldmann | „ | 10 | 190 | 570 000 | 3000 | – |
| „ | 19 | „ „ „ °/H. Busch | Aug. | 15 | 225 | 814 950 | 3622 | 4 |
| Juni | 30 | Prov. von 23 667,30 à $\frac{1}{3}$% | | | | | 78 | 8 |
| „ | 30 | Court. von 8 872,57 à 1‰ | | | | | 8 | 8 |
| „ | 30 | Stempel und Porto | | | | | 9 | 1 |
| | | | | | | 4 696 003 | 31472 | 5 |
| Juli | 1 | An Saldovortrag | Juni | 30 | | M | 4299 | 7 |

. Irrtum

Berlin, den

**Becker**

Anmerkungen: Kapitalsumme im Soll 31 375,70

„ „ Haben 27 120,80

Rohsaldo M 4 254,90

Zur Berechnung der Zinszahl wird 4254,90 abgerundet in 4255.

Leipzig. Zinsen 5%

*Haben*

| 1887 | | | | Tage | Zahlen | M | ₰ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Jan. | 10 | Per Ihre Rimesse auf Bär hier | Jan. 30 | 30 | 64 500 | 2150 | — |
| Febr. | 6 | „ „ „ auf Paris | Febr. 6 | 36 | 50 904 | 1413 | 75 |
| „ | 21 | „ Verkaufsrechnung über Samen | „ 21 | 51 | 264 894 | 5193 | 90 |
| März | 17 | „ Ihre Rimesse auf Petersburg | März 17 | 77 | 191 499 | 2487 | 40 |
| April | 14 | „ „ „ auf Rofs hier | Mai 25 | 145 | 374 680 | 2583 | 80 |
| Mai | 6 | „ „ „ auf Magdeburg fco Court. | Juni 15 | 165 | 471 075 | 2855 | 30 |
| „ | 25 | „ „ „ auf G. Bossart hier | Juli 23 | 203 | 607 579 | 2993 | — |
| „ | 25 | „ „ „ auf A. Löwe hier | Juni 24 | 174 | 253 344 | 1456 | 40 |
| Juni | 12 | „ „ „ auf E. Vogel hier | Juli 31 | 210 | 747 180 | 3558 | — |
| „ | 24 | „ „ „ auf M. Hahn hier | Aug. 11 | 221 | 491 283 | 2222 | 80 |
| „ | 24 | „ „ „ auf C. Seemann hier | Juli 9 | 189 | 38 934 | 206 | 45 |
| Juni | 30 | Zinszahl vom Rohsaldo 4254,90 | | 180 | 765 900 | — | — |
| „ | 30 | Saldo der Zinszahlen, 5% | | | 374 231 | 51 | 98 |
| „ | 30 | „ zu unsern Gunsten | | | | 4299 | 78 |
| | | | | | 4 696 003 | 31472 | 56 |

vorbehalten.

30. Juni 1887.

**& Comp.**

Die Endresultate der Schemata I und II differieren um 3 ₰, weil die Zinsensaldi um 3 ₰ verschieden sind. Die Abweichung ist sehr gering; ihren Grund hat sie darin, dafs wegen der Abrundung der Kapitalwerte zur Berechnung der Zinszahlen in diesen dann nicht die äufserste Genauigkeit herrscht.

**Schema III.** (Kontokorrent mit ungleichen Zinsfüſsen und Posten, welche über den Abschluſstag hinausgehen.)

*Debent* Herren **J. Arnold & Comp.** in Hamburg. *Credunt*

| 1887 | | | Valuta | M | ₰ | 1887 | | | Valuta | M | ₰ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Juli | 1 | An Saldo laut vor. Kontokorrent | Juni 30 | 2542 | 80 | Juli | 14 | Per Ihre Rimesse auf hier | Juli 14 | 2000 | — |
| „ | 5 | „ Ihre Tratte °/Walther | Juli 5 | 350 | — | Aug. | 6 | „ „ „ auf Brüssel | Aug. 10 | 2735 | 92 |
| Aug. | 26 | „ unsere Zahlung an Meyer | Aug. 26 | 1000 | — | Sept. | 15 | „ „ „ an Horn & Co. | Sept. 30 | 304 | 60 |
| Sept. | 6 | „ Ihre Tratte °/Winkel | Sept. 15 | 1215 | 64 | Okt. | 20 | „ „ „ auf hier | Okt. 24 | 240 | — |
| Okt. | 10 | „ unsere Rimesse auf Berlin | Okt. 18 | 500 | — | Nov. | 1 | „ „ „ auf Bordeaux | Febr. 15 | 463 | 58 |
| Nov. | 1 | „ unsere Zahlung an B. Toſs | Nov. 1 | 750 | — | Dec. | 4 | „ unsere Tratte °/Damm | März 4 | 350 | — |
| „ | 6 | „ Ihre Tratte °/Kohl | Febr. 20 | 391 | 36 | „ | 31 | „ Zinsen von 774 Zahlen à 5% | | 10 | 75 |
| Dec. | 15 | „ unsere Rimesse an Richter | Jan. 15 | 820 | — | „ | 31 | „ Saldo | | 1518 | 93 |
| „ | 31 | „ Zinsen von 1813 Zahlen à 6% | | 30 | 22 | | | | | | |
| „ | „ | „ Prov. von 5027 M à $\frac{1}{3}$% | | 16 | 76 | | | | | | |
| „ | „ | „ Court. von 3199,50 M à 1‰ | | 3 | 20 | | | | | | |
| „ | „ | „ Porto und Stempel | | 3 | 80 | | | | | | |
| | | | | 7623 | 78 | | | | | 7623 | 78 |
| Jan. | 1 | An Saldovortrag | M | 1518 | 93 | | | | | | |

S. E. & O.

Berlin, den 31. December 1887.

**Becker & Comp.**

## Zins-Nota.

(Zu Schema III, nach der Staffelrechnung, mit verkürzten Zinszahlen, Debent 6%, Credunt 5%.)

| 1887 | | Beträge M | ₰ | | Tage Deb. | Tage Cred. | Zahlen Deb. | Zahlen Cred. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Juli | 1 | D 2542 | 80 | Vom 1. Juli bis 5. Juli | 5 | | 127 | |
| „ | 5 | D 350 | — | | | | | |
| | | D 2892 | 80 | „ 5. Juli „ 14. Juli | 9 | | 260 | |
| „ | 14 | C 2000 | — | | | | | |
| | | D 892 | 80 | „ 14. Juli „ 10. Aug. | 26 | | 232 | |
| Aug. | 10 | C 2735 | 92 | | | | | |
| | | C 1843 | 12 | „ 10. Aug. „ 26. Aug. | | 16 | | 295 |
| „ | 26 | D 1000 | — | | | | | |
| | | C 843 | 12 | „ 26. Aug. „ 15. Sept. | | 19 | | 160 |
| Sept. | 15 | D 1215 | 64 | | | | | |
| | | D 372 | 52 | „ 15. Sept. „ 30. Sept. | 15 | | 56 | |
| „ | 30 | C 304 | 60 | | | | | |
| | | D 67 | 92 | „ 30. Sept. „ 18. Okt. | 18 | | 12 | |
| Okt. | 18 | D 500 | — | | | | | |
| | | D 567 | 92 | „ 18. Okt. „ 24. Okt. | 6 | | 34 | |
| „ | 24 | C 240 | — | | | | | |
| | | D 327 | 92 | „ 24. Okt. „ 1. Nov. | 7 | | 23 | |
| Nov. | 1 | D 750 | — | | | | | |
| | | D 1077 | 92 | „ 1. Nov. „ 31. Dec. | 59 | | 636 | |
| Febr. | 15 | C 463 | 58 | „ 31. Dec. „ 15. Febr. | 45 | | 209 | |
| | | D 614 | 34 | | | | | |
| „ | 20 | D 391 | 36 | „ 31. Dec. „ 20. Febr. | | 50 | | 196 |
| | | D 1005 | 70 | | | | | |
| März | 4 | C 350 | — | „ 31. Dec. „ 4. März | 64 | | 224 | |
| | | D 655 | 70 | | | | | |
| Jan. | 15 | D 820 | — | „ 31. Dec. „ 15. Jan. | | 15 | | 123 |
| | | D 1475 | 70 | | | | 1813 | 774 |
| | | | | Debentzinsen 1813 : 60 = 30,22 M | | | | |
| | | | | Creduntzinsen 774 : 72 = 10,75 M | | | | |

der kaufmännischen Arithmetik zu Erfurt nennt und mit seinem Buche[1]) einen „Beitrag zur Schnellrechnung für Bankiers, Kaufleute und Rechnungsbeamte“ liefern will, nur die progressive Methode, während er die übrigen mit keinem Worte erwähnt. Der pomphafte Titel seines Rechenwerks erregt freilich gröfsere Hoffnungen.

§ 103. **Schlufs.** Durch die Aufstellung resp. Erneuerung des Zählprincips als einzig sichere und zweckmäfsige Grundlage alles Rechnens (§ 97) gegenüber der beliebt gewordenen Grubeschen allseitigen Zahlbehandlung (§ 96) ist zwischen den Methodikern ein Gegensatz bezüglich der elementaren Rechenübungen geschaffen worden. Wir hoffen, dafs — wie überall der Widerstreit der Meinungen zu einer Quelle der Wahrheit wird — auch dieser Kampf einen bleibenden Gewinn für die Methodik des Rechenunterrichts abgeben wird.

Anschauungsprincip und Zählprincip lassen sich sehr wohl verbinden zum „anschaulichen Zählen“. Die Anschauungsmittel für den Rechenunterricht bleiben in Gebrauch, nur dieser wird ein andrer. Man läfst sie nicht mehr wie bisher „betrachten“ (Zahlbilder), sondern benutzt sie zum Zählen, und die Schüler werden zur derjenigen Thätigkeit angeleitet und genötigt, die sie bislang ungenötigt vornehmen mufsten, wenn sie über die Anzahl der Einheiten einer vorgelegten Menge Auskunft geben sollten. Finger, Striche, Kugelmaschine, Knopftafel sind die zweckmäfsigsten Anschauungsmittel; Striche die allerbesten, weil man deren immer so viele zeichnen kann, als man jeweilig braucht. Wer an Fingern und Strichen zählen gelernt hat, kann alles zählen. Alle Anschauungsmittel, bei denen nicht jede Einheit gesondert erscheint (wie etwa die Einheiten als kupferrote Kugeln, die Zehner als nickelfarbige, die Hunderter als silberweifse und die Tausender als goldgelbe), sind zu verwerfen. Ein solches Anschauungsmittel ist nichts andres als die Ausgrabung des römischen Zahlsystems; das Kind mufs sich unter M nichts mehr und nichts weniger als bei der „gelben Kugel“ denken etc. Sobald aber beim Zeigen eines Körpers oder eines Bildes (Buchstaben) die zusammenfassende Vorstellung von kleineren oder gröfseren Gruppen der Einheiten beansprucht wird, so hört damit das Sehen der Einheiten d. h. die Anschauung auf, und es ist dann am zweckmäfsigsten, als Erinnerungszeichen für eine bestimmte Menge von Einheiten dasjenige Mittel zu gebrauchen, dessen sich das Kind später ausschliefslich zu bedienen hat, und dieses Mittel ist die „Ziffer mit Stellen-

---

1) J. B. Montag, Die vorzügl. prakt. Regeln u. Rechnungsvorteile. Nebst einer überaus kurzen Methode, an jedem beliebigen Tage des Jahres den Abschlufs des Conto-Corrents incl. der bis dahin aufgelaufenen Zinsen zwischen Wechselhäusern in wenigen Minuten zu finden, Weimar 1841.

wert". Eine gelbe Kugel oder ein M machen den Inhalt der Zahl 1000 nichts deutlicher als eine 1 auf der Tausendstelle.

Die zweckmäfsigste Reihenfolge in den elementaren Rechenübungen ist diejenige, welche nach den Species ordnet. Bezüglich der speziellen Ausführung dieses Stufenganges werden jedoch niemals alle Methodiker unter einen Hut kommen; geringfügige Meinungsverschiedenheiten schaden hier auch nichts. Es ist garnicht nötig, dafs alle Uhren gleichen Gang haben; es können doch auch ohne dieses eigensinnige Verlangen alle die richtige Zeit anzeigen.

Grubes Manier kann im Unterrichte, solange es sich um Üben handelt, eine Stelle nicht mehr finden. Wer sie beibehalten will, kann am Ende des Kursus darnach repetieren; doch verliert die Methodik auch nichts, wenn sie ganz fällt.

Wir schliefsen unsere Darstellung mit den Grundforderungen, welche die Gegenwart an eine zweckmäfsige Methode des Rechenunterrichts stellt. Da alles Zweckmäfsige sachgemäfs, natürlich und praktisch ist, so müssen auch einer Methode diese Attribute zukommen, wenn sie anders mit Recht zweckmäfsig heifsen soll.

Sachgemäfs ist sie dann, wenn sie der Natur des Gegenstandes angemessen ist; wenn sie nicht der des ganz heterogene Objekte behandelnden Anschauungsunterrichts analog konstruiert, sondern wenn sie auf dasjenige Princip gegründet ist, aus welchem der Zahlbegriff allein gewonnen und jedes Rechnungsergebnis allein ermittelt und bewiesen werden kann, auf das Princip des Zählens.

Naturgemäfs ist sie dann, wenn sie der Natur des Kindes angemessen ist; wenn die Entwickelung des Stoffes gleichen Schritt hält mit der Entfaltung der geistigen Kraft, dafs also für das Subjekt wie für das Objekt jede folgende Stufe eine mit Notwendigkeit aus der vorhergehenden sich entfaltende und ebenso immer die notwendige Entwickelungsbasis für die ihr folgende darstellt.

Praktisch ist der Rechenunterricht nicht etwa dann, wenn sobald und soviel als möglich Beispiele aus den ökonomischen und kaufmännischen Verhältnissen herbeigezogen, sondern wenn durch ihn die Kraft des Schülers zu jener Stärke erhoben wird, dafs derselbe die Praxis des Lebens leicht und sicher beherrscht, sobald er mit ihr in Berührung kommt.

# Register.

---

